

点可数覆盖与序列覆盖映射

(第二版)

林 寿 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书以点可数覆盖为线索,利用映射的一般方法对用覆盖或网来定义的广义度量空间类进行系统的研究,总结20世纪90年代以来点可数覆盖与序列覆盖映射的重要研究成果,包含国内学者的相关研究工作,引用了国内学者发表的文献237篇,内容包括点可数覆盖、点有限覆盖列、遗传闭包保持覆盖与星可数覆盖等.在第一版的基础上,第二版对点可数覆盖及Ponomarev系作了大量充实,补充了序列覆盖映射理论的若干新进展,包括引用了2000年以来发表的文献220篇,给出了53个与点可数覆盖及序列覆盖映射相关问题的回答,引用或提出了92个尚未解决的问题供有兴趣的读者研究.

本书论述严谨,自成系统,只要具备一般拓扑学基础知识就能阅读本书,并进入研究的前沿.读者对象为大专院校数学系师生、研究生和数学工作者.

图书在版编目(CIP)数据

点可数覆盖与序列覆盖映射/林寿著.—2版.—北京:科学出版社,2015.11

ISBN 978-7-03-046396-8

I. ①点… II. ①林… III. ①一般拓扑—理论研究 IV. ①O189.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第270483号

责任编辑:王丽平/责任校对:彭涛

责任印制:徐晓晨/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年9月第一版 开本:B5(720×1000)

2015年11月第二版 印张:20

2015年11月第二次印刷 字数:391 000

定价:118.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序

可度量性和紧性是一般拓扑学的中心概念,之所以这么说,是从历史的角度来看,一般拓扑学始终围绕这两个概念而发展,从当今一般拓扑学的结构方面来看也是如此.紧性是通过开覆盖来定义的.在 P.S. Alexandroff, P. S. Urysohn, F. B. Jones, A. H. Stone, R. H. Bing, J. Nagata 和 Ju. M. Smirnov 等的经典工作之后,可度量性也可以用开覆盖序列来刻画.覆盖系的方法作为空间分类主要手段之一现在已得到普遍的认可.许多非常重要的空间类是通过自然覆盖结构引入的,这种自然覆盖结构均可在可度量空间中找到其源头.在 20 世纪五六十年代, K. Nagami, V. I. Ponomarev, A. Okuyama, A. Arhangel'skii 等已发现覆盖系可以很有效地用来构造把可度量空间映满具有这种覆盖系空间的一些自然映射.此法导致了建立在覆盖系和映射相互作用基础上的空间与映射的相互分类理论^[24].

这本专著结合映射的一般方法对用覆盖或网来定义的一些广义度量空间类进行了系统的研究,论述了作为一般拓扑学中心领域之一的空间与映射相互分类理论的现状.作者林寿教授及其合作者、同事(如,刘川,燕鹏飞,戴牧民, K. Nagami, Y. Tanaka, T. Hoshina)对该理论作出了较大的贡献,得出了重要且往往相当出乎意料的结果.

该书的一个重要方面是它可作为关于映射分类和关于构造具有各种特定性质的映射的方法这两方面系统的信息源,这种研究方向在现有的教科书中涉猎不多,因而这本专著是弥足珍贵的.然而,该书对所有的一般拓扑学者都非常有用,即使是那些从事研究完全不同问题的人和兴趣各异的研究生.的确,这本专著对于可度量性及广义度量空间类作了有趣的全新的介绍,引入了基本的映射类,尤其是商映射、紧覆盖映射及其种种的推广.这些概念都具有最基本的性质.

该书中系统地研究与应用的另一个基本性质是在 1959 年提出来的网的概念.拓扑空间 X 的子集族 \mathcal{P} 称为 X 的网^[17],若 X 的每一个开子集是 \mathcal{P} 的某子族之并.在寻找具有可数网的网空间时曾用过网的概念. Arhangel'skii 的论文^[17]发现了可分度量空间的每一连续映射都有可数网,还建立了每一个具有可数网的紧的 Hausdorff 空间都有可数基(因此是可度量化).从这些论述可得出,如果紧的 Hausdorff 空间 Y 是可分度量空间的连续映射,那么 Y 是可度量化空间.该定理是空间与映射一般理论中最早的典型结果之一,该专著论述了它的现代进展.由此,网比起“形式太好”的基具有更加微妙和更加可变的结构.正是通过对网进行各种各样常常是巧妙的限制,使许多重要的广义度量空间类得以引入并加以研究,其中

之一, 即由 Michael^[354] 使用 k 网的概念定义的空间类是这本专著真正的核心.

虽然阅读该书无需非常特别的背景知识, 但是该书中的论述已大大超过了一般的水平, 它包含有丰富、深刻、出色、具有极高专业水准的理论结果. 定理 2.1.9, 推论 2.1.11, 定理 2.2.5, 定理 2.2.10, 定理 2.3.11, 定理 2.3.13 和定理 2.5.10 都是优美结果的范例^①. 特别地, 这些定理为映射成为紧覆盖映射提供了充分的条件, 也为空间成为具有可分纤维的度量空间的商空间提供了充分的条件.

该书不仅把读者带到了广义度量空间理论探索的最前沿, 而且包括了许多有趣的且相当重要的尚未解决的问题, 它们中有些是老问题, 有些是新问题. 在此例举其中一个很自然的问题. 设 Y 是一个具有紧纤维的可度量空间的商空间, 更设 Y 是正则的, 那么 Y 的每一点是可数个开集的交吗^②? 该书对开始在这个或类似的问题上进行研究的人提供了所有必备的背景知识和信息. 因此, 该专著不但对专家而且对研究生来说是同样有趣又有用的.

我想提一提该专著的另一个令人高兴的方面. 它的出现标志了一般拓扑学在中国长期发展的成功, 这个发展造就了一群极具创造力的中国数学工作者, 使他们作出了对这一般拓扑学主流方向的闪光的重要贡献.

衷心地祝贺该书的作者和读者!

A. V. 阿尔汉格爾斯基

2001 年 5 月 1 日

于俄亥俄大学

^① 这是第一版中的序号, 在第二版中的序号依次是定理 2.1.8, 推论 2.1.9, 定理 2.3.5, 定理 2.3.10, 定理 2.4.13, 推论 2.4.10 和定理 2.5.6.

^② 这问题在第一版, 第二版中分别为问题 3.3.19, 问题 3.3.22.

第二版前言

谨以本书祝贺四川大学蒋继光教授 80 寿辰、苏州大学周友成教授 70 寿辰.

构建点可数覆盖与映射之间的本质关系始于 20 世纪 60 年代^[400], 至 20 世纪 80 年代末国外关于该课题的研究已基本发展到极致^[161, 164, 171, 377]. 正是由于专著 *Open Problems in Topology*^[366] 的出版及序列覆盖映射类的引入与探索, 为广义度量空间理论在 20 至 21 世纪之交的关键时期注入了新的活力.

本书的出版恰逢其时, 不仅凸显了它在空间与映射理论方面的价值, 同时为 21 世纪初拓扑空间理论的发展提供了一条有效的途径. 第一版于 2002 年出版后, 在广义度量空间类和映射类方面均引起不少同行的关注, 如具有点可数覆盖的空间, 具有点正则覆盖的空间、 σ 点离散空间类、Ponomarev 系和紧覆盖映射、紧映射、局部可分度量空间的映射等, 都产生了丰富的结果. 本书第一版共引用或提出尚未解决的问题或猜想 32 个, 现至少已解决了其中的 17 个问题 (见 5.5 节). 为更好地体现、反映学科研究趋势, 特出版经修订后的第二版.

鉴于 Gruenhage^[159, 160, 161, 163] 等已有关于广义度量空间理论的系列介绍, 我们不再专门综述广义度量空间理论及新进展. 本书第二版比第一版增加了 60% 以上的篇幅, 尽量不与作者的《广义度量空间与映射》^[291] 内容交叉, 保持各自在研究广义度量空间理论中的优势与特点. 本书的修订和出版得到国家自然科学基金项目“ M_3 蕴涵 M_1 问题” (No. 11171162), “仿拓扑群的广义度量性质及其在紧化中的应用” (No. 11201414) 和“仿拓扑群中的三空间问题” (No. 11471153) 的支持. 过去的 10 多年间, 不少同事在阅读第一版时提出了若干建议, 包括希望本书能有英文版本^[73]. 在此对他们及所有关心第二版出版的同行, 尤其是南京大学师维学教授、闽南师范大学李进金教授、北京工业大学彭良雪教授在书稿的编辑与推荐, 以及作者在四川大学、闽南师范大学的研究生在文稿的排版与订正上给予的帮助, 表示衷心的感谢.

作者^①

2015 年 4 月

① 通信地址: 352100 福建省宁德市蕉城南路宁德师范学院数学研究所.

E-mail: shoulin60@163.com.

第一版前言

空间与映射的理论是一般拓扑学的重要组成部分. 我的著作《广义度量空间与映射》^[268] 用映射方法系统论述了广义度量空间的基本理论, 总结了 20 世纪 60 年代至 90 年代初一般拓扑学的重要研究成果. 广义度量理论与覆盖性质理论中的许多问题涉及点可数覆盖的研究. 20 世纪 90 年代一般拓扑学的发展动力之一是专著 *Open Problems in Topology* ^[366] 中的问题, 其中的一些问题涉及具有点可数基空间与度量空间的紧覆盖映射, 引起了一批拓扑学名家对点可数覆盖及相关映射理论的兴趣, 促进了 k 网理论与度量空间映射理论的发展, 许多优秀的结果不断涌现. 因此, 总结这 10 年国际上广义度量空间理论的成果, 反映我国学者在该领域的贡献, 引导更多的年轻数学工作者投身于该领域的工作是十分迫切和非常必要的.

除一些熟知的点集拓扑学知识与引用《广义度量空间与映射》和集论拓扑学中的几个结果外, 本书的证明基本上是封闭的, 一些较为复杂的例子也给出了详细的构造. 特别地, 无须假设读者已阅读过《广义度量空间与映射》. 本书由五章组成. 第 1 章简要综述 20 世纪 90 年代的广义度量空间理论, 包含它的主要研究课题、国内外学者的重要贡献, 同时作为预备章也介绍一些基本概念、相关的命题及例子. 第 2 章介绍点可数覆盖与度量空间的 s 映射理论, 用特殊的商空间刻画具有点可数基的空间, 建立度量空间的商 s 映像与由 k 网、序列网、 cs 网、 sn 网和 cfp 网等集族确定的点可数集族之间的精确关系. 第 3 章介绍点有限覆盖列与度量空间的 π 映射、紧映射理论, 发展点正则覆盖的方法, 阐述度量空间上序列覆盖映射与 1 序列覆盖映射的联系. 第 4 章介绍遗传闭包保持覆盖、控制族与度量空间的闭映射理论, 揭示这些空间类的一些覆盖性质. 第 5 章介绍星可数覆盖与局部可分度量空间的商映射理论, 突出具有星可数 k 网空间在研究局部可分度量空间映像中的地位, 列举点可数覆盖在探讨度量空间的闭映像和乘积空间的 k 空间性质中的作用.

受高国土教授十多年的教导, 近年来作者在广义度量空间理论方面做过一些探索性的研究, 尤其偏爱空间与映射方面的课题. 广义度量空间理论从 20 世纪 60 年代起在国际上蓬勃发展, 各个不同时期均不断有名家与名作涌现, 作者的工作受 A. Arhangel'skiĭ, L. Foged, G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka 等的影响较大. 尽管本书与《广义度量空间与映射》同属于广义度量空间理论, 作者无意写一本关于空间与映射方向的手册, 仅试图把它作为《广义度量空间与映射》的姐妹篇, 以点可数覆盖为线索, 借助序列覆盖映射理论, 反映 20 世纪 90 年代广义度量空间理论研究引人入胜的一个侧面. 本书的大部分内容取材于作者的博士学位论文^[280],

同时包含了作者及国内外学者 1992 年以来的一些相关工作. 感谢高国士教授、刘应明教授 (中国科学院院士)、林群研究员 (中国科学院院士)、吴利生教授、蒋继光教授、戴牧民教授和周友成教授等前辈多年来一直给予作者的关心、指导与扶持, 感谢与刘川教授、燕鹏飞教授、Y. Tanaka 教授、T. Mizokami 教授、彭良雪博士等进行富有成效的合作, 感谢与恽自求教授、李进金教授、葛英副教授、李克典教授、夏省祥教授等进行有益的学术交流, 感谢国家自然科学基金 [资助项目“点集拓扑” (No. 19476010)、“函数空间的拓扑性质” (No. 19501023) 与“集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用” (No. 19971048)], 福建省自然科学基金 [资助项目“集论拓扑” (No. A94019)、“函数空间的拓扑性质” (No. A97025) 与“集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用” (No. F00010)], 福建省“百千万人才工程”人选培养基金 [资助项目“广义度量空间研究” (1999)] 及宁德师范高等专科学校“学术带头人专项经费”等为研究工作提供的资金保证, 感谢 Y. Tanaka 教授、K. Tamano 教授、J. Nagata 教授、M. Sakai 教授、A. Shibakov 博士、Y. Yajima 教授、M. Choban 教授、H. Junnila 教授、刘川教授、高智民教授、恽自求教授和师维学教授等为研究工作提供的资料保证. 感谢宁德师范高等专科学校及刘卓雄校长等师专同事 20 年来一直对作者各方面的支持. 感谢福建师范大学对作者聘任为基础数学岗位特聘教授的重视及提供优良的工作和生活环境. 本书的出版应特别感谢刘应明教授、江守礼教授和王尚志教授的热情推荐, 著名拓扑学家 A. V. 阿尔汉格爾斯基教授的序及中共中央统战部华夏英才基金的支持.

林 寿

2001 年 3 月 31 日

于福建师范大学

目 录

序

第二版前言

第一版前言

第 1 章 绪论	1
1.1 记号与术语	3
1.2 预备知识: 广义度量空间类与度量空间的映像	11
1.3 预备知识: 商映射与弱第一可数性	19
1.4 例	27
第 2 章 关于点可数覆盖	40
2.1 wcs^* 网与基	41
2.2 cs^* 网与伪序列覆盖映射	58
2.3 k 网与闭映射	69
2.4 序列网与商映射	74
2.5 cfp 网、 cs 网与紧覆盖映射	84
2.6 sn 网、 so 网与序列覆盖映射	101
2.7 外 sn 网与序列覆盖且紧覆盖映射	110
第 3 章 关于点有限覆盖列	121
3.1 对称空间	121
3.2 点星网与 π 映射	128
3.3 点有限的点星网与紧映射	143
3.4 点正则覆盖	152
3.5 序列覆盖映射与 1 序列覆盖映射	165
第 4 章 关于遗传闭包保持覆盖	180
4.1 点离散集族与紧有限集族	180
4.2 k 网与覆盖性质	194
4.3 局部可分度量空间的闭映像	205
4.4 控制族与闭映射	214
第 5 章 关于星可数覆盖	224
5.1 局部可分度量空间的商 s 映像	224
5.2 局部可分度量空间的商紧映像	236

5.3 k 网与 Sakai 的定理	244
5.4 乘积空间的 k 空间性质	255
5.5 某些解决或尚未解决的问题	269
参考文献	280
索引	304