第五章　关于星可数覆盖

可分度量空间的商映象或度量空间的商 s 映象都有简洁的内在特征. 寻求作为介于这两者之间的局部可分度量空间的商 s 映象的内在特征是一个十分有趣的问题. 局部可分度量空间等价于具有局部可数基的正则空间, 也等价于具有星可数基的正则空间, 所以局部可数覆盖或星可数覆盖是研究局部可分度量空间及其映象的重要工具. 林寿[1995]详细地讨论了具有局部可数 k 网的空间和局部可分度量空间的 ss 映象. Ikeda 和 Tanaka[1993]较早研究了具有星可数 k 网的空间. 随后, 刘川与 Tanaka[1996a, 1996b, 1996c, 1998a, 1998b]广泛地讨论了具有星可数 k 网空间的各种性质, 提出了不少问题, 有力地促进了与星可数 k 网相关的广义度量空间的研究. 紧接着 Sakai[1997a, 1997b]继承了他们的一些工作, 获得了星可数覆盖及局部可分度量空间闭映象的若干优美结果, 如证明了具有星可数 k 网的正则的 k 空间等价于由 k 且$\aleph_0$空间族控制的正则空间(定理 5.2.2). 本章旨在介绍这方面的结果, 同时利用点可数覆盖理论探讨乘积空间是 k 空间的充要条件.

5.1　cs 网与局部可分度量空间的映象

本节讨论局部可分度量空间的商 s 映象、序列覆盖的商 s 映象以及它们的分解定理, 乘积空间的 k 空间性质(刘川, Tanaka[1996b]; Shibakov[1995a]; Tanaka[1997]), CW 复形的映射性质(刘川, Tanaka[1996c])等与此有关. 1924 年 Alexandroff 就已把局部可分度量空间分解为可分度量空间的拓扑和(Engelking[1977]的 4.4.F), 1956 年 A. H. Stone 研究了局部可分度量空间的开 s 映象与商 s 映象的度量化问题(Engelking[1977]的4.5.17 和 4.5.18). 作为介于可分度量空间和度量空间之间的局部可分度量空间的商 s 映象我们仅获得一个较复杂的内在刻画, 寻求局部可分度量空间的简单的商 s 映象的内有刻画还是一个尚未解决的问题(刘川, Tanaka[1996b]; Tanaka, 夏省祥[1996]). 与此相关的是 Velichko[1988]提出的关于度量空间商 s 映象的一个一般性问题.

问题 5.1.1　寻求拓扑性质 Φ 使得空间 X 是具有性质 Φ 的度量空间的商 s 映象当且仅当 X 既是 Φ 空间又是度量空间的商 s 映象.

上述问题反映了寻求一类由映射所刻画空间的分解性质. 本节将围绕问题 5.1.1 介绍局部可分度量空间的映象, 给出了局部可分度量空间的伪序列覆盖 s 映象、序列覆盖 s 映象、商 s 映象和闭 s 映象的内在刻画, 阐述这些映射与确定的星可数覆盖的关系.

由引理 2.3.1, 度量空间的商映象也是局部可分度量空间的商映象. 由于存在非局部可分的度量空间, 下述引理说明度量空间的商 s 映象未必是局部可分度量空间的商 s 映象.

引理 5.1.2 若空间 X 是局部可分度量空间的商 s 映象, 则 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的.

证明. 设 X 是局部可分度量空间的商 s 映象, 则 X 具有由 cosmic 子空间组成的点可数的 cs* 网 $\mathcal{G}$. 不妨设 X 是第一可数的. 由引理 2.1.5, $\mathcal{G}$ 满足条件(A). 对于每一 $x\in X$, 存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{G}^{<\omega}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})$. 由引理 1.4.10 和引理 1.4.7, $\cup\mathcal{F}$ 是 x 在 X 中的邻域, 而 $\cup\mathcal{F}$ 也是 X 的可分子空间. 所以, X 是局部可分的. ∎

定理 4.2.6 表明空间 X 是局部可分度量空间的闭映象等价于 X 是度量空间的闭映象且 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的空间. 关于问题 5.1.1, 我们有

猜想 5.1.3(林寿, 刘川, 戴牧民[1997]) 空间 X 是局部可分度量空间的商 s 映象当且仅当 X 是度量空间的商 s 映象且 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的.

本节的第一个结果是刻画局部可分度量空间的商 s 映象. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族, $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 x 的序列. $\mathcal{P}$ 称为 $\{x_n\}$ 的 cs 网, 若 U 是 X 中含 x 的开子集, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $\{x_n\}$ 是终于 P 的且 $P\subset U$. $\mathcal{P}$ 称为 $\{x_n\}$ 的 cs*网, 若 U 是 X 中含 x 的开子集, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $\{x_n\}$ 的某子序列是终于 P 的且 $P\subset U$.

定理 5.1.4(周丽珍[1999]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的伪序列覆盖 s 映象.

(2) X 是局部可分度量空间的子序列覆盖 s 映象.

(3) X 具有点可数覆盖 $\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, 其中每一 X_α 具有可数网 $\mathcal{P}_\alpha$ 满足: 对于 X 中任一收敛序列 S 存在 $\beta\in\Lambda$ 使得 $\mathcal{P}_\beta$ 为 S 的某子序列的 cs 网.

(4) X 具有点可数覆盖 $\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, 其中每一 X_α 具有可数网 $\mathcal{P}_\alpha$ 满足: 对于 X 中任一收敛序列 S 存在 $\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$ 使得 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$ 是 S 的 cs*网.

证明. (1)$\Rightarrow$(2), (3)$\Rightarrow$(4)都是显然的.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 X 是局部可分度量空间 M 在子序列覆盖 s 映射 f 下的象, 由引理 4.3.4, $M=\oplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$, 其中每一 M_α 是可分的度量空间. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 让 $\mathcal{B}_\alpha$ 是 M_α 的可数基,

$X_\alpha=f(M_\alpha)$, $\mathcal{P}_\alpha=f(\mathcal{B}_\alpha)$, 则$\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是 X 的点可数覆盖且每一$\mathcal{P}_\alpha$是$X_\alpha$的可数网. 对于 X 的任一收敛序列 S, 存在 M 的收敛序列 T 使得 f(T)是 S 的子序列. 因为$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{B}_\alpha$是 M 的基, 所以存在$\beta\in\Lambda$使得$\mathcal{P}_\beta$是 f(T)的 cs 网.

(4)$\Rightarrow$(1). 设空间 X 具有点可数覆盖$\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 其中每一$X_\alpha$具有可数网$\mathcal{P}_\alpha$满足: 对于 X 中任一收敛序列 S 存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$使得$\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$是 S 的 cs*网. 因为$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha$是 X 的点可数 cs*网, 由引理 1.3.7, 不妨设对于 X 中的任一收敛序列 S, 存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$使得$S\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}X_\alpha$且$\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$是 S 的 cs*网. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 设$X_\alpha\in\mathcal{P}_\alpha=\{P_\beta:\beta\in\Gamma_\alpha\}$, Γ_α是可数的, 且不妨设对于$\alpha\neq\alpha'\in\Lambda$, $\Gamma_\alpha\cap\Gamma_{\alpha'}=\varnothing$. 令$\Gamma=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\Gamma_\alpha$, 赋予$\Gamma$离散拓扑, 置$M=\{\beta=(\beta_i)\in\Gamma^\omega$: 存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$及$\alpha\in\Lambda'$使得 $P_{\beta_0}=X_\alpha$, $\langle P_{\beta_i}\rangle\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$, 且$\langle P_{\beta_i}\rangle$是 X 中某点$x(\beta)$的网$\}$, 则 M 是度量空间. 作$f:M\to X$使得$f(\beta)=x(\beta)$, 由引理 1.3.8, 易知 f 为 s 映射. 结合下述的(4.1)和(4.2), 说明 X 是局部可分度量空间的伪序列覆盖 s 映象.

(4.1) M 是局部可分的空间.

设$\beta=(\beta_i)\in M$, 则存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$及$\alpha\in\Lambda'$使得 $P_{\beta_0}=X_\alpha$, $\langle P_{\beta_i}\rangle\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$. 令$M_\beta=\{\gamma=(\gamma_i)\in M:\gamma_0=\beta_0$, $\langle P_{\gamma_i}\rangle\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}\}$, 则 M_β为 M 中含β的开子集, 且$M_\beta\subset(\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\Gamma_\alpha)^\omega$, 从而$M_\beta$是可分的, 因此 M 是局部可分的度量空间.

(4.2) f 是伪序列覆盖映射.

设 S 是 X 中的任一收敛序列, 则存在$\Lambda'\in\Lambda^{<\omega}$使得$S\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}X_\alpha$且$\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$是 S 的 cs*网. 由引理 1.3.8, 存在 M 的紧子集 L 使得 f(L)=S, 于是 f 是伪序列覆盖映射. ▌

推论 5.1.5(林寿, 刘川, 戴牧民[1997]) 对于序列空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的商 s 象.

(2) X 具有点可数覆盖$\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 其中每一$X_\alpha$具有可数网$\mathcal{P}_\alpha$满足: 对于 X 中任一收敛序列 S 存在$\beta\in\Lambda$使得$\mathcal{P}_\beta$为 S 的某子序列的 cs 网.

(3) X 具有点可数覆盖$\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 其中每一$X_\alpha$具有可数网$\mathcal{P}_\alpha$满足: 对于 X 中任一收

敛序列 S 存在$\Lambda' \in \Lambda^{<\omega}$使得$\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_\alpha$是 S 的 cs*网. ∎

下面讨论局部可分度量空间的序列覆盖的商 s 映象的刻画. 我们在 2.2.8 中已定义了序列可分性, 并且证明了在序列可分空间中具有确定点可数 cs*网的空间具有可数网. 易验证, 映射保持序列可分性, 每一可分的 Fréchet 空间是序列可分空间, 但是可分的序列空间未必是序列可分空间(例 1.5.4 和引理 2.2.9). 下面证明序列可分空间有与 cosmic 空间相类似的映射刻画.

定理 5.1.6(林寿, 燕鹏飞[2001a]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是序列可分空间.

(2) X 是第一可数的可分空间的映象.

(3) X 是可展的可分空间的映象.

证明. 显然, (3)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(1).

(1)$\Rightarrow$(3). 设(X, τ)是序列可分空间. 由于每一可数空间是可数离散空间的映象, 不妨设 X 是不可数空间. 让 D=$\langle d_n\rangle$是 X 的可数的序列稠子集. 对于每一 $x\in X$, 取定 $S_x=\langle d_{x,n}\rangle\subset D$ 使得序列 S_x 在 X 中收敛于 x. 如果 $x\in D$, 不妨设每一 $d_{x,n}=x$; 如果 $x\in X\setminus D$, 不妨设$\langle d_{x,n}\rangle$的各项是两两互不相同的. 集合 X 的新拓扑τ'定义如下: 对于每一 $x\in U\subset X$, U 是 x 在(X, τ')的邻域当且仅当对于某个 $m\in N$ 有$\{d_{x,n}: n\geq m\}\subset U$. 那么$\tau'$是 X 上的拓扑.

(6.1) τ'是可分, 局部紧且 T_2 的空间.

D 是τ'的可数稠子集, 并且对于每一 $x\in X, m\in N$, $\{x\}\cup\{d_{x,n}: n\geq m\}$是 x 在(X, τ')中的紧邻域.

(6.2) τ'是可展空间.

不妨设$\cup\{S_x: x\in X\setminus D\}$=D. 对于每一 $n\in N$, 置

$F_n=\{d_i: i\leq n\}$, $\mathcal{U}_n=\{\{x\}\cup(S_x\setminus F_n): x\in X\setminus D\}\cup\{\{x\}: x\in F_n\}$.

则 $\mathcal{U}_n$ 是 X 的开覆盖且对于每一 $x\in X$,

$$\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)=\begin{cases}\{x\}\cup(S_x\setminus F_n), & x\in X\setminus D\\ \{x\}, & x\in F_n\end{cases}.$$

于是$\langle \mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)\rangle$是 x 在(X, τ')中的局部基. 因此$\{\mathcal{U}_n\}$是(X, τ')的展开, 故(X, τ')是可展空间.

因为$\tau \subset \tau'$，恒等函数$\mathrm{id}_X:(X, \tau') \to (X, \tau)$是连续的，于是 X 是可分且可展空间的映象. ∎

由引理 1.3.8, cosmic 空间是可分度量空间的映象，所以有

推论 5.1.7　cosmic 空间是序列可分空间. ∎

下面转入讨论局部可分度量空间的映象与 Velichko 的问题 5.1.1.

引理 5.1.8　设$\mathcal{P}$是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs 网. 如果$\mathcal{U}$是 X 的 sn 覆盖，置$\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P}$：对于某一$U\in\mathcal{U}$有$P\subset U\}$. 则$\mathcal{P}'$仍是 X 的 cs 网.

证明. 设$x\in W$且 W 是 X 的开子集. 如果$\{x_n\}$是 X 中收敛于 x 的序列，置

$\mathcal{P}_x=\{P\in\mathcal{P}$：序列$\{x_n\}$是终于 P 的且$P\subset W\}=\langle P_n\rangle$.

对于每一$n\in N$，令$Q_n=\bigcap_{i\le n}P_i$，那么$Q_n\in\mathcal{P}_x$. 让$U_x\in\mathcal{U}$是 x 在 X 中的序列邻域. 如果存在序列$\{q_n\}$使得每一$q_n\in Q_n\setminus U_x$，设 G 是 X 的开子集且$x\in G$，由于$\mathcal{P}$是 X 的 cs 网，那么对于某一$k\in N$有$P_k\subset G$，于是当$n\ge k$时有$q_n\in Q_n\subset P_k\subset G$，从而序列$\{q_n\}$收敛于 x，这与$U_x$是 x 的序列邻域相矛盾. 因此对于某一$m\in N$有$Q_m\subset U_x$，于是$Q_m\in\mathcal{P}'$. 故$\mathcal{P}'$是 X 的 cs 网. ∎

引理 5.1.8 中覆盖$\mathcal{P}$的点可数性是本质的. 让 X 是例 1.5.7 的 Michael 空间$N\cup\{p\}$. 设$\mathcal{P}$是 X 的基且$\mathcal{U}=\{\{x\}: x\in X\}$，则$\mathcal{U}$是 X 的 so 覆盖. 置$\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P}$：对于某一$U\in\mathcal{U}$有$P\subset U\}$，那么$\mathcal{P}'=\{\{x\}: x\in N\}$不是 X 的 cs 网.

定理 5.1.9(林寿，燕鹏飞[2001a]; Tanaka，夏省祥[1996])　对于空间 X，下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖 s 映象.

(2) X 有由 cosmic 子空间组成的点可数 cs 网.

(3) X 有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 cs 网.

(4) X 既有点可数 cs 网又有由$\aleph_0$子空间组成的 so 覆盖.

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 让$f:M\to X$是序列覆盖的 s 映射，其中 M 是局部可分的度量空间. 设$\mathcal{B}$是 M 的由可分子集组成的σ局部有限基. 置$\mathcal{P}=f(\mathcal{B})$. 那么$\mathcal{P}$是 X 的由 cosmic 子空间组成的点可数 cs 网.

(2)$\Rightarrow$(4). 设$\mathcal{P}$是 X 的由cosmic子空间组成的点可数 cs网. 对于每一$P\in\mathcal{P}$，由推论5.1.7，让

D(P)是 P 的可数的序列稠子集. 对于每一 $x\in X$, 置

$\mathcal{P}(x, 1)=\{P\in\mathcal{P}: x\in P\}$, $D(x, 1)=\cup\{D(P): P\in\mathcal{P}(x, 1)\}$.

对于每一 $n\geq 2$, 归纳地定义

$\mathcal{P}(x, n)=\{P\in\mathcal{P}: P\cap D(x, n-1)\neq\varnothing\}$, $D(x, n)=\cup\{D(P): P\in\mathcal{P}(x, n)\}$.

让 $\mathcal{P}(x)=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}(x, n)$, $U(x)=\cup\mathcal{P}(x)$. 为完成(4)的证明, 只须说明 U(x)是 X 的序列开子集且可数子族 $\mathcal{P}(x)$是 U(x)的 cs 网. 如果 X 中的序列$\{y_n\}$收敛于 $y\in U(x)\cap W$, 其中 W 是 X 的开子集, 则对于某一 $m\in N$ 和 $P\in\mathcal{P}(x, m)$有 $y\in P$, 于是存在 D(P)中的序列$\{z_n\}$在 X 中收敛于 y, 从而对于某一 $k\in N$ 和 $F\in\mathcal{P}$ 有$\{y\}\cup\{y_n, z_n: n\geq k\}\subset F\subset W$, 因此 $F\in\mathcal{P}(x, m+1)\subset\mathcal{P}(x)$且$\{y\}\cup\{y_n: n\geq k\}\subset F\subset U(x)\cap W$. 这表明 U(x)是 X 的序列开子集且 $\mathcal{P}(x)$是 U(x)的 cs 网.

由引理 5.1.8 可知(4)$\Rightarrow$(3), 下面证明(3)$\Rightarrow$(1).

设 X 有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 cs 网 $\mathcal{P}$. 让 $\mathcal{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 由定理 2.4.3, 存在可分度量空间 M_α 和序列覆盖映射 $f_\alpha: M_\alpha\to P_\alpha$. 置 $M=\oplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$, $Z=\oplus_{\alpha\in\Lambda}P_\alpha$ 且 $f=\oplus_{\alpha\in\Lambda}f_\alpha: M\to Z$. 那么 M 是局部可分的度量空间且 f 是序列覆盖映射. 定义 $h: Z\to X$ 是自然映射, 且让 $g=h\circ f: M\to X$. 那么 g 是序列覆盖的 s 映射. █

定理 5.1.9 中的(1)$\Leftrightarrow$(2)在 Tanaka, 夏省祥[1996]中被证明, (1)$\Leftrightarrow$(3)在李进金[2000a]中被证明. (4)的作用之一是由它可获得局部可分度量空间的序列覆盖的商 s 映象的下述分解性质. 这是问题 5.1.1 的部分解.

推论 5.1.10(林寿, 燕鹏飞[2001a])　对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖的商 s 映象.

(2) X 既是局部的$\aleph_0$空间又是度量空间的序列覆盖的商 s 映象.

(3) X 是具有点可数 cs 网的局部$\aleph_0$的序列空间. █

类似地, 我们也可获得局部可分度量空间的 1 序列覆盖s 映象和 2 序列覆盖 s 映象的刻画, 相关的结果可见李进金, 蔡伟元[2000].

现在, 我们进一步介绍在定理 5.1.9 中“so 覆盖”是点可数的情形.

定理 5.1.11(林寿, 燕鹏飞[2001a])　对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 有星可数的 cs*网(cs 网).

(2) X 有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 so 覆盖.

(3) X 有由$\aleph_0$子空间组成的互不相交 so 覆盖.

证明. (3)$\Rightarrow$(2)是显然, 只须证(2)$\Rightarrow$(1)$\Rightarrow$(3).

(2)$\Rightarrow$(1). 设$\mathcal{P}$是空间 X 的由$\aleph_0$子空间组成的点可数so 覆盖. 置$\mathcal{P}$={P_α: $\alpha \in \Lambda$}. 对于每一$\beta \in \Lambda$, 由推论 5.1.7, 以D_β表示P_β的可数的序列稠子集. 对于每一$\alpha \in \Lambda$, 因为P_α是序列开的, 所以$D_\beta \cap P_\alpha \neq \varnothing$当且仅当$P_\beta \cap P_\alpha \neq \varnothing$. 于是{$P_\alpha \in \mathcal{P}$: $P_\beta \cap P_\alpha \neq \varnothing$}是可数的. 即$\mathcal{P}$是星可数的. 对于每一$\alpha \in \Lambda$, 设$\mathcal{P}_\alpha$是$P_\alpha$的可数 cs 网, 易验证, $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha$是 X 的星可数 cs 网.

(1)$\Rightarrow$(3). 设$\mathcal{P}$是空间 X 的星可数 cs*网. 由引理 4.3.4, 设{$\mathcal{P}_\alpha$:$\alpha \in \Lambda$}和{X_α : $\alpha \in \Lambda$}分别是$\mathcal{P}$和X的星可数分解, 于是X是$\aleph_0$子空间族{X_α : $\alpha \in \Lambda$}的互不相交的并, 且每一$\mathcal{P}_\alpha$是X_α的可数 cs*网. 我们还要证明每一X_α在 X 中是序列开的. 如果 X 中的序列{x_n}收敛于点$x \in X_\alpha$, 令$(\mathcal{P})_x$=<P_i>, 因为$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网, 由引理 1.3.7, 存在 m, k$\in$N 使得{x_n : n$\geq$m}$\subset \bigcup_{i\leq k} P_i$, 这时$\bigcup_{i\leq k} P_i \subset X_\alpha$, 于是序列{$x_n$}是终于$X_\alpha$的, 故$X_\alpha$是序列开的. 因此, {$X_\alpha$: $\alpha \in \Lambda$}是 X 的由$\aleph_0$子空间组成的互不相交的 so 覆盖. █

推论 5.1.12 对于序列空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 有星可数的 cs*网(cs 网).

(2) X 有由$\aleph_0$子空间组成的点可数开覆盖.

(3) X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和. █

推论 5.1.13 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有局部可数的 cs*网.

(2) X 具有局部可数且星可数的 cs 网.

(3) X 具有局部可数的 cfp 网.

证明. (3)$\Rightarrow$(1)是显然的, 所以只须证明(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3).

(1)$\Rightarrow$(2). 设$\mathcal{P}$是空间 X 的局部可数cs*网. 对于x$\in$X, 存在x在X中的开邻域V_x使得V_x

与 $\mathcal{P}$ 中至多可数个元相交. 令 $\mathcal{F}$={P∈$\mathcal{P}$: 存在 $V_x \supset P$}. 则 $\mathcal{F}$ 是星可数的. 由引理 4.3.4, 设 $\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$和$\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$分别是 $\mathcal{F}$ 和 X 的星可数分解, 于是 X 是$\aleph_0$子空间族$\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$的互不相交并, 且每一 $\mathcal{F}_\alpha$ 是 X_α 的可数 cs*网. 让 $\mathcal{H}_\alpha$ 是 $\mathcal{F}_\alpha$ 的有限并的全体, $\mathcal{H}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{H}_\alpha$. 由于每一$V_x$至多与可数个$X_\alpha$相交, $\mathcal{H}$是局部可数且星可数的, 往证它是 X 的 cs 网. 设 U 是 X 的开子集, 并且 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x∈U, 由引理 1.3.7, 存在 m∈N 和 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得$\{x\}\cup\{x_n : n\ge m\}\subset\cup\mathcal{P}'\subset U\cap V_x$且 $x\in\cap\mathcal{P}'$, 这时有唯一的$\alpha\in\Lambda$使得 $x\in X_\alpha$, 则$\cup\mathcal{P}'\in\mathcal{H}_\alpha$, 从而$\mathcal{H}$是 X 的 cs 网.

(2)⇒(3). 设 X 具有局部可数 cs 网, 则 X 的紧子集是第一可数的, 由引理 2.5.5 知 X 的局部可数 cs 网就是 X 的 cfp 网. ▮

引理 5.1.14(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]) 设 X 是可分, 正则的 Fréchet 空间. 若$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数 wcs*网, D 是 X 的可数稠子集, 则 $\mathcal{F}=\{cl(P) : P\in\mathcal{P}, P\cap D\neq\varnothing\}$是 X 的 k 网.

证明. 对于 K⊂U, 其中 K, U 分别是X 的紧子集和开子集. 令 $\mathcal{F}(U)=\{F\in\mathcal{F} : F\subset U\}$. 对于每一 x∈U, 存在 X 的开子集 V 使得 x∈V⊂cl(V)⊂U. 因为 x∈cl(D), 存在 V∩D 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 从而存在 P∈$\mathcal{P}$使得 P 含有序列$\{x_n\}$的无限项且 P⊂V, 因此 cl(P)∈$\mathcal{F}$且 x∈cl(P)⊂U. 这说明 $\mathcal{F}(U)$是 U 的可数覆盖. 记 $\mathcal{F}(U)=<F_n>$. 对于每一 z∈K, 则存在 m∈N 使得 $z\in int_K(\bigcup_{n\le m}F_n)$. 若不然, 设 $z\in F_1$, 由引理 2.1.6 和推论 2.1.4, K 是第一可数的, 存在收敛于 z 的序列$\{z_n\}$使得每一 $z_n\in K\setminus\bigcup_{i\le n}F_i$, 又由于$\bigcup_{i\le n}F_i$是闭的, 存在$D\setminus\bigcup_{i\le n}F_i$中的序列$\{y_{nk}\}$收敛于 z_n, 从而 $z\in cl\{y_{nk} : n, k\in N\}$, 于是存在序列$\{y_{n_jk_j}\}$收敛于 z. 因为对于所有的 n, k∈N, 有 $z_n\neq z$, $y_{nk}\neq z$, 所以当 $j\to\infty$ 时有 $n_j\to\infty$. 这时存在 P∈P 使得 cl(P)⊂U 且 P 含有序列$\{y_{n_jk_j}\}$的无限项, 于是 cl(P)∈$\mathcal{F}(U)$, 所以存在 m∈N 有 $cl(P)=F_m$, 但是当 $n_j>m$ 时有 $y_{n_jk_j}\notin F_m$, 矛盾. 故存在 m∈N 使得 $z\in int_K(\bigcup_{n\le m}F_n)$, 因此存在 $\mathcal{F}(U)$的有限子族覆盖 K, 即$\mathcal{F}$ 是 X 的 k 网. ▮

推论 5.1.15 具有点可数 wcs*网的局部可分的正则的 Fréchet 空间是$\aleph_0$空间族的拓扑和.

证明. 设 X 是具有点可数 wcs*网的局部可分的正则的 Fréchet 空间, 由定理 2.1.15, X 是亚 Lindelöf 空间, 于是 X 具有由可分子集组成的点可数开覆盖, 这覆盖是星可数覆盖, 所以由引理 4.3.4, X 是可分空间族的拓扑和, 再由引理 5.1.14, X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和. ▌

定理 5.1.16(林寿[1995], Velichko[1987]) 对于正则的 Fréchet 空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有局部可数 cs 网.

(2) X 具有局部可数 k 网.

(3) X 具有星可数 cs 网.

(4) X 是局部可分度量空间的闭 s 映象.

(5) X 是局部可分度量空间的商 s 映象.

(6) X 是具有点可数 cs*网的局部可分空间.

(7) X 具有点可数的可分 cs*网.

证明. 由引理 2.1.6, 推论 5.1.12, 引理 4.2.1, 引理 2.1.10, 引理 1.4.2 和推论 5.1.15 知(1)$\Rightarrow$(2), (3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(5)$\Rightarrow$(6)$\Rightarrow$(7), (6)$\Rightarrow$(1).

(2)$\Rightarrow$(3). 设$\mathcal{P}$是空间 X 的局部可数 k 网. 由正则性, 不妨设$\mathcal{P}$是 X 的闭 k 网, 于是$\mathcal{P}$是 X 的 cs*网. 由推论 5.1.13, X 具有星可数 cs 网.

(7)$\Rightarrow$(5). 设 X 具有点可数的可分 cs*网. 由推论 5.1.15, X 具有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 cs*网. 再由推论 5.1.5, X 是局部可分度量空间的商 s 映象. ▌

定理 5.1.16 说明了在正则的 Fréchet 空间中局部可分性是问题 5.1.1 的一个解. 具有局部可数 k 网空间的进一步的等价条件可见推论 5.2.7.

图 5.1.17 本节中介绍的一些集族间的关系如下图.

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\aleph_0\text{空间族}\\ \text{的拓扑和}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \begin{array}{c}\text{局部可数}\\ \text{cs 网}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{星可数}\\ \text{cs 网}\end{array} \arrow[r, Leftrightarrow] & \begin{array}{c}\text{星可数}\\ \text{cs*网}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{由}\aleph_0\text{子空间组成}\\ \text{的点可数 cs 网}\end{array} \arrow[d, Rightarrow] \\
\begin{array}{c}\text{由}\aleph_0\text{子空间组成的}\\ \text{点可数的开覆盖}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{局部可数}\\ \text{k 网}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{星可数}\\ \text{k 网}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{星可数}\\ \text{wcs*网}\end{array} \arrow[r, Rightarrow] & \begin{array}{c}\text{点可数}\\ \text{wcs*网}\end{array} \\
& \text{局部}\aleph_0\text{空间} & & \begin{array}{c}\sigma\text{紧有限}\\ \text{k 网}\end{array} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

例 5.1.18 图 5.1.17 所述空间之间的不蕴含关系由下述例子说明.

(1) 具有局部可数 cs 网$\not\Rightarrow$$\aleph_0$空间族的拓扑和; 如例 1.5.5.

(2) 具有星可数 cs 网$\not\Rightarrow$具有σ紧有限 k 网, 或局部$\aleph_0$空间; 例如极大紧化βN.

(3) 局部可分度量空间的商 s 映象$\not\Rightarrow$局部可分空间或具有点可数 cs 网; 如例 1.5.6 中的空间 X.

(4) 具有星可数 k 网$\not\Rightarrow$局部可分空间或具有点可数 cs 网; 如例 1.5.2 中的扇空间 S_{ω_1}.

(5) 具有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 cs 网的序列空间$\not\Rightarrow$具有由 cosmic 子空间组成的点可数 so 覆盖或具有星可数 wcs*网; 如例 1.5.4.

(6) 局部$\aleph_0$空间$\not\Rightarrow$具有点可数 wcs*网; 例如赋予序拓扑的空间ω_1.

(7) 具有局部可数 k 网$\not\Rightarrow$具有点可数 cs*网; 如例 1.5.8.

(8) 具有σ紧有限 k 网$\not\Rightarrow$具有星可数 wcs*网; 如例 1.5.6 中的空间 X_M, 其中 M 是非可分的度量空间. 因为 X_M 由度量空间族控制, 由引理 4.2.5, X_M 具有σ紧有限 k 网. 若 X_M 具有星可数 wcs*网, 由引理 4.3.4, X_M 具有由$\aleph_0$子空间组成的点可数 wcs*网. 而 M 是 X_M 的第一可数的子空间, 由引理 5.1.2 的证明, M 是局部可分的, 矛盾. 故 X_M 不具有星可数 wcs*网. ▌

对照定理 3.3.8 和定理 4.2.6, 我们有下述问题.

问题 5.1.19 局部可分度量空间的序列覆盖的紧映象是否等价于具有由$\aleph_0$子空间组成的点正则 cs 网的空间?

问题 5.1.20 设正则空间 X 是具有点可数 cs*网的 Fréchet 空间. 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的, 那么 X 是否是局部可分空间?

5.2 k 网与 Sakai 的定理

我们在§4.2 已初步讨论了局部可分度量空间的闭映象, 定理 4.2.6 表明正则空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 是具有σ遗传闭包保持可分 k 网的 Fréchet 空间. 由引理 4.1.3, 这时 X 是具有σ紧有限可分 k 网的 Fréchet 空间, 其逆命题是否成立?

问题 5.2.1(Ikeda, Tanaka[1993]) 具有点可数可分 k 网的正则的 Fréchet 空间是否是局部可分度量空间的闭映象?

本节介绍 Sakai 关于星可数 k 网的 k 空间的主要工作, 内容包括这类空间的结构(定理 5.2.2), 与具有局部可数 k 网空间的精确关系(定理 5.2.5), 与局部可分度量空间闭映象的关系(定理 5.2.8),

同时肯定地回答了问题 5.2.1(定理 5.2.8).

定理 5.2.2(Sakai[1997a]) 正则空间 X 是具有星可数 k 网的 k 空间当且仅当 X 由 k 且$\aleph_0$空间族控制.

证明. 设空间 X 由 k 且$\aleph_0$空间族$\mathcal{D}$控制, 于是 X 关于$\mathcal{D}$具有弱拓扑, 从而 X 是 k 空间. 记$\mathcal{D}=\{X_\alpha : \alpha<\lambda\}$且每一 X_α 是$\aleph_0$空间. 对于每一$\alpha<\lambda$, 让 $Y_0=X_0$, $Y_\alpha=X_\alpha\setminus\bigcup_{\beta<\alpha}X_\beta$ 且$\mathcal{P}_\alpha$是 X_α 的可数 k 网. 置 $\mathcal{P}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{P}_{\alpha}|_{Y_\alpha}$. 那么$\mathcal{P}$是 X 的星可数覆盖. 往证$\mathcal{P}$是 X 的 k 网. 对于 $K\subset U$, 其中 K 和 U 分别是 X 的紧子集和开子集, 由引理 4.2.5, K 仅与有限个 Y_{α_n} $(n\le m)$相交, 对于每一 $n\le m$, 存在 $\mathcal{P}'_{\alpha_n}\in\mathcal{P}_{\alpha_n}^{<\omega}$ 使得 $K\cap X_{\alpha_n}\subset\cup\mathcal{P}'_{\alpha_n}\subset U$, 让 $\mathcal{P}'=\bigcup_{n\le m}\mathcal{P}'_{\alpha_n}|_{Y_{\alpha_n}}$, 那么$\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$且 $K\subset\cup\mathcal{P}'\subset U$. 故 X 具有星可数 k 网.

反之, 设正则空间 X 是具有星可数 k 网$\mathcal{P}$的 k 空间. 由引理 4.3.4, 让$\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$是由$\mathcal{P}$确定的 X 的星可数分解. 为了证明的简明起见, 对于Λ的子集Γ, 记$[\Gamma]=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$和 $n\in N$, 归纳地定义Λ的可数子集$\Lambda_{\alpha n}$如下: $\Lambda_{\alpha 1}=\{\alpha\}$. 如果$\Lambda_{\alpha n}$已被定义, 置$\Lambda_{\alpha n+1}=\{\beta\in\Lambda$: 存在$[\Lambda_{\alpha n}]$中的序列收敛于 X_β 中的点$\}$. 由引理 4.3.4, $\Lambda_{\alpha n}$是可数的. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 置$\Lambda_\alpha=\bigcup_{n\in N}\Lambda_{\alpha n}$, 那么$\Lambda_\alpha$是$\Lambda$的可数子集. 再置$\mathcal{D}=\{[\Lambda_\alpha] : \alpha\in\Lambda\}$. 往证 X 由 k 且$\aleph_0$空间族$\mathcal{D}$控制.

显然,$\mathcal{D}$的每一元$[\Lambda_\alpha]$是 X 的 k 且$\aleph_0$子空间.

对于每一$\Gamma\subset M$. 让 $Y=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}[\Lambda_\alpha]$. 若 Y 不是 X 的闭子集, 因为 X 是序列空间, 存在 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于某点 $y\in X\setminus Y$, 由引理 4.3.4, 集$\{\alpha\in\Lambda$: 存在 $n\in N$ 使得 $y_n\in X_\alpha\}$是有限的, 于是, 不妨设存在$\gamma\in\bigcup_{\alpha\in\Gamma}\Lambda_\alpha$使得序列$\langle y_n\rangle\subset X_\gamma$. 这时存在$\alpha\in\Gamma$和 $m\in N$ 使得$\gamma\in\Lambda_{\alpha m}$且$\langle y_n\rangle\subset[\Lambda_{\alpha m}]$, 于是 $y\in[\Lambda_{\alpha m+1}]\subset[\Lambda_\alpha]$, 矛盾. 故 Y 是 X 的闭子集. 这说明$\mathcal{D}$是 X 的闭包保持闭覆盖.

设 $Z\subset Y$ 且对于每一$\alpha\in\Gamma$, $Z\cap[\Lambda_\alpha]$是 Y 的闭子集. 若 Z 不是 Y 的闭子集, 存在 Z 中的序

列$\{z_n\}$收敛于 $z\in Y\setminus Z$. 与上述类似的理由，存在$\alpha\in\Gamma$使得$[z_n]\subset[\Lambda_\alpha]$，从而 $z\in Z$，矛盾. 所以 Z 是 Y 的闭子集，因而 Y 关于$\{[\Lambda_\alpha]:\ \alpha\in\Gamma\}$具有弱拓扑. ▮

因为由仿紧空间族控制的空间是仿紧空间(Morita[1954])，由正则σ空间族控制的空间是σ空间(林寿[1991])，所以有下述

推论 5.2.3 具有星可数 k 网的正则的 k 空间是仿紧σ空间. ▮

推论 5.2.4 具有星可数 k 网的可分，正则的 k 空间是$\aleph_0$空间.

证明. 设 X 是具有星可数 k 网的可分，正则的 k 空间. 由推论 5.2.3, X 是 Lindelöf 空间，于是 X 的离散子集族是可数族. 再由引理 4.3.2, X 的星可数分解族是可数族，于是 X 具有可数 k 网. ▮

空间 X 的特征$\chi(X)$是一基数，定义为 $\sup\{\chi(p,X): p\in X\}+\omega$，其中$\chi(p,X)=\min\{|\mathscr{V}|:\mathscr{V}$是 p 在 X 的局部基}. 由此，空间 X 在点 x 具有可数局部基可记为$\chi(x,X)=\omega$，X 是第一可数空间可记为$\chi(X)=\omega$.

定理 5.2.5(刘川，Tanaka[1998b]; Sakai[1997a]) 设 X 是具有星可数 k 网的正则的 k 空间，则下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分空间.

(2) X 具有点可数的 cs 网.

(3) X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和.

若更设(CH)，它们也等价于

(4) $\chi(X)\le\omega_1$.

证明. 设$\mathscr{P}$是空间 X 的星可数 k 网. 让$\{X_\alpha:\ \alpha\in\Lambda\}$是由$\mathscr{P}$确定的 X 的星可数分解，$\{[\Lambda_\alpha]:\ \alpha\in\Lambda\}$是定理 5.2.2 证明中构造的空间 X 的由 k 且$\aleph_0$子空间组成的控制族.

(3)$\Rightarrow$(1)和(2)是显然的. (1)$\Rightarrow$(3). 设 X 是局部可分空间，由推论 5.2.4, X 是局部$\aleph_0$空间，再由推论 5.2.3 和推论 5.1.12, X 具有由$\aleph_0$子空间组成的点可数开覆盖，所以 X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和.

(2)$\Rightarrow$(3). 设空间 X 具有点可数 cs 网$\mathscr{H}$.

(5.1) 若$\{Y_\beta:\ \beta<\omega_1\}$是$\{X_\alpha:\ \alpha\in\Lambda\}$的子族. 对于每一$\beta<\omega_1$，让$\{x_{\beta n}\}$是 Y_β中收

敛于点 $x_\beta \in X\setminus Y_\beta$ 的序列, 那么对于每一 $\mu \in \Lambda$, 集 $X_\mu \cap \{x_\beta : \beta < \omega_1\}$ 是可数的.

事实上, 若存在 $\mu \in \Lambda$ 使得 $X_\mu \cap \{x_\beta : \beta < \omega_1\}$ 是不可数的, 因为 X_μ 是 $\aleph_0$ 空间, 由推论 5.1.7, X_μ 是序列可分空间, 让 D_μ 是 X_μ 的可数的序列稠子集, 不妨设 $\{x_\beta : \beta < \omega_1\} \subset X_\mu \setminus D_\mu$. 对于每一 $\beta < \omega_1$, 让 $\{y_{\beta n}\}$ 是 D_μ 中收敛于点 x_β 的序列. 定义 X 中的序列 $\{t_{\beta n}\}$ 使得每一 $t_{\beta 2k-1}=x_{\beta k}, t_{\beta 2k}=y_{\beta k}$, 令 $T_\beta=[t_{\beta n}]$, 则序列 $\{t_{\beta n}\}$ 收敛于 x_β. 因为 $\mathcal{H}$ 是 X 的 cs 网, 存在 $H_0 \in \mathcal{H}$ 使得 $T_0 \setminus H_0$ 是有限的. 固定点 $z_0 \in H_0 \cap \langle x_{0n} \rangle$. 设 $\gamma < \omega_1$ 且对于 $\beta < \gamma$, 已定义 $H_\beta \in \mathcal{H}$, $z_\beta \in H_\beta \cap \langle x_{\beta n} \rangle$ 使得 $T_\beta \setminus H_\beta$ 是有限的. 由引理 4.3.4, $\{z_\beta : \beta < \gamma\}$ 是 X 的闭子集. 于是我们可以选取 $H_\gamma \in \mathcal{H}$ 使得 $H_\gamma \cap \{z_\beta : \beta < \gamma\} = \varnothing$ 且 $T_\gamma \setminus H_\gamma$ 是有限的, 固定点 $z_\gamma \in H_\gamma \cap \langle x_{\gamma n} \rangle$. 我们可以归纳地得到 $\mathcal{H}$ 的子集族 $\{H_\beta : \beta < \omega_1\}$ 使得当 $\beta_1 \neq \beta_2$ 时有 $H_{\beta_1} \neq H_{\beta_2}$. 因为每一 H_β 与可数集 D_μ 相交, 所以 $\{H_\beta : \beta < \omega_1\}$ 不是点可数的, 这与 $\mathcal{H}$ 的点可数性相矛盾.

(5.2) Λ 的覆盖 $\{\Lambda_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是点可数的.

子标族 $\{\Lambda_{\alpha 1} : \alpha \in \Lambda\}$ 显然是点可数的. 若 $\{\Lambda_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 不是点可数的, 则存在 $n \in N$ 使得 $\{\Lambda_{\alpha n} : \alpha \in \Lambda\}$ 是点可数的且存在 $\beta \in \bigcap_{\alpha<\omega_1} \Lambda_{\beta_\alpha n+1}$. 因为 $\{\Lambda_{\alpha n} : \alpha \in \Lambda\}$ 是点可数的, 我们可以设 $\beta \in \bigcap_{\alpha<\omega_1} (\Lambda_{\beta_\alpha n+1} \setminus \Lambda_{\beta_\alpha n})$, 于是对于 $\alpha < \omega_1$ 存在 $\gamma_\alpha \in \Lambda_{\beta_\alpha n}$ 且 X_{γ_α} 中的序列 $\{x_{\alpha n}\}$ 收敛于某点 $x_\alpha \in X_\beta$. 由 $\{\Lambda_{\beta_\alpha n} : \alpha \in \Lambda\}$ 的点可数性, 集 $\{\gamma_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是不可数的. 此外, 由(5.1), $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ 是可数的. 因此, 由引理 4.3.4, 不难看出 X 含有子空间同胚于 S_{ω_1}. 然而, S_{ω_1} 不具有点可数 cs 网, 矛盾. 因此, $\{\Lambda_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ 是点可数的.

(5.3) X 的覆盖 $\{[\Lambda_\alpha] : \alpha \in \Lambda\}$ 是星可数的.

注意到条件 $[\Lambda_\alpha] \cap [\Lambda_\beta] \neq \varnothing$ 蕴含 $\Lambda_\alpha \cap \Lambda_\beta \neq \varnothing$. 如果对于 $\beta < \omega_1$ 有 $[\Lambda_\alpha] \cap [\Lambda_{\alpha_\beta}] \neq \varnothing$, 那么 $\Lambda_\alpha \cap \Lambda_{\alpha_\beta} \neq \varnothing$. 因为 Λ_α 是可数的, 所以 $\{\Lambda_{\alpha_\beta} : \beta < \omega_1\}$ 不是点可数的, 矛盾.

由引理 4.3.4 和(5.3), 存在互不相交族$\{\Gamma_\gamma : \gamma<\kappa\}$使得每一$\Gamma_\gamma$是可数的且对于不同的$\gamma$与$\delta$有$(\bigcup_{\mu\in\Gamma_\gamma}[\Lambda_\mu])\cap(\bigcup_{\upsilon\in\Gamma_\delta}[\Lambda_\upsilon])=\varnothing$. 因为每一$\bigcup_{\mu\in\Gamma_\gamma}[\Lambda_\mu]$是$\aleph_0$空间且是 X 的开子集, 所以 X 是$\aleph_0$空间族$\{\bigcup_{\mu\in\Gamma_\gamma}[\Lambda_\mu] : \gamma<\kappa\}$的拓扑和.

(4)$\Rightarrow$(1). 对于每一 x$\in$X, 让$\{V_\beta : \beta<\omega_1\}$是 x 在 X 中的局部基, 则存在$\beta<\omega_1$使得$V_\beta$仅与可数多个$X_\alpha$相交. 否则, 由归纳法, 存在$\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$的子族$\{Y_\beta : \beta<\omega_1\}$和 X 的子集 D=$\{x_\beta : \beta<\omega_1\}$使得每一 $x_\beta\in V_\beta\cap Y_\beta\setminus\{x\}$, 且这些 Y_β是两两互不相同的. 由引理 4.3.4, D 是 X 的离散子集, 矛盾. 故, 存在$\beta<\omega_1$使得 V_β仅与至多可数个X_α相交. 因为每一X_α是遗传可分的, 所以V_β是可分的, 从而 X 是局部可分的.

假设(CH), 我们证明(3)$\Rightarrow$(4). 由于 X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和, 为证明χ(X)$\le\omega_1$, 只须证明对于每一可分的正则空间 Y, 有χ(Y)$\le\omega_1$. 让 D 是 Y 的可数稠子集. 对于每一 y$\in$U$\in\tau$(Y), 存在 Y 的开子集 V 使得 y$\in$V$\subset$cl(V)$\subset$U, 让 E=V$\cap$D, 则 y$\in$int(cl(V))=int(cl(E))$\subset$U. 所以{int(cl(E)) : E$\subset$D}是 Y 的基, 从而χ(Y)$\le$w(Y)$\le 2^{d(X)}=\omega_1$. ■

若没有假设(CH), 则定理 5.2.5 中的(3)$\nRightarrow$(4). 事实上, 序列扇S_ω是 k 且$\aleph_0$空间, 而在集论假设(MA+¬ CH)下, $\chi(S_\omega)=2^\omega>\omega_1$(刘川, Tanaka[1998b]).

引理 5.2.6(刘川, Tanaka[1996c]) 设 X 是正则的 Fréchet 空间. 若 X 具有点可数的可分 k 网, 令 Z={x$\in$X : x 在 X 中有可分的邻域}. 那么

(1) Z 是$\aleph_0$空间族的拓扑和.

(2) X$\setminus$Z 是 X 的离散子空间.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数的可分 k 网, 由推论 5.1.15, $\mathcal{P}$的每一元是遗传可分的. 显然, Z 是 X 的局部可分的开子集, 由推论 5.1.15, Z 是$\aleph_0$空间族的拓扑和. 令 Y=X$\setminus$Z, 则 Y 是 X 的闭子集, 往证 Y 是 X 的离散子空间. 对于每一 x$\in$X, 称 X 在 x 有闭S_{ω_1}, 若 X 有闭子空间 S 同胚于S_{ω_1}且 S 的非孤立点是 x.

(6.1) 对于每一 x$\in$Y, X 在 x 有闭S_{ω_1}.

因为 $x\in Y$, x 不是 X 的孤立点，存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_{0n}\}$使得所有的 $x_{0n}\neq x$. 让

$\mathcal{P}_0=\{P\in\mathcal{P}: P\cap[x_{0n}]\neq\varnothing\}$.

则 $\mathcal{P}_0$是可数的. 由于 x 在 X 中没有可分的邻域，所以 $x\notin \mathrm{int}(\cup\mathcal{P}_0)$，于是 $x\in \mathrm{cl}(X\setminus(\cup\mathcal{P}_0))$. 因为 X 是 Fréchet 空间，存在 $X\setminus(\cup\mathcal{P}_0)$中的序列$\{x_{1n}\}$收敛于 x. 让

$\mathcal{P}_1=\{P\in\mathcal{P}: P\cap[x_{1n}]\neq\varnothing\}$.

则 $\mathcal{P}_1$是可数的. 因为 $x\in \mathrm{cl}(X\setminus(\cup(\mathcal{P}_0\cup\mathcal{P}_1)))$，于是存在 $X\setminus(\cup(\mathcal{P}_0\cup\mathcal{P}_1))$中的序列$\{x_{2n}\}$收敛于 x. 按这种方式，我们可以得到互不相交的序列族$\{\{x_{\alpha n}\}: \alpha<\omega_1\}$使得

(6.1.1) 每一序列$\{x_{\alpha n}\}$收敛于 x 且所有的 $x_{\alpha n}\neq x$.

(6.1.2) $\mathcal{P}$ 的每一元至多与一个序列$\{x_{\alpha n}\}$相交.

让 $S=\{x\}\cup\{x_{\alpha n}: n\in N, \alpha<\omega_1\}$. 由(6.1.2)及 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网，X 的任何紧子集交至多有限个序列$\{x_{\alpha n}\}$，所以 S 是 X 的闭子集. 对于序列$\{x_{\alpha n}\}$的任何有限子集 F_α，$\bigcup_{\alpha<\omega_1}F_\alpha$ 是 S 的闭子集，于是 S 同胚于 S_{ω_1}. 从而 X 在 x 有闭 S_{ω_1}.

(6.2) Y 在 X 中是离散的.

因为 X 是 Fréchet 空间，只须证明 Y 中的任一收敛序列是有限的. 设存在 Y 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x，其中 x_n, x 是互不相同的. 由(6.1)，对于每一 $n\in N$, X 在 x_n 有闭 S_{ω_1}. 让 X 的闭子空间 $S^{(n)}=\{x_n\}\cup\{x_{\alpha i}^{(n)}: i\in N, \alpha<\omega_1\}$同胚于 S_{ω_1}. 选取 $S^{(1)}$ 中的序列$\{x_{\alpha_1 i}^{(1)}\}$收敛于 x_1. 让

$\mathcal{F}_1=\{P\in\mathcal{P}: P\cap\langle x_{\alpha_1 i}^{(1)}\rangle\neq\varnothing\}$.

由于$\cup\mathcal{F}_1$是遗传可分的. 因此，我们可以得到$S^{(2)}\setminus(\cup\mathcal{F}_1)$中的序列$\{x_{\alpha_2 i}^{(2)}\}$收敛于 x_2. 让

$\mathcal{F}_2=\{P\in\mathcal{P}: P\cap\langle x_{\alpha_2 i}^{(2)}\rangle\neq\varnothing\}$.

那么$\cup(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)$是遗传可分的，于是可以得到$S^{(3)}\setminus(\cup(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2))$中的序列$\{x_{\alpha_3 i}^{(3)}\}$收敛于 x_3. 由此，可以得到 X 中序列的互不相交族$\{\langle x_{\alpha_n i}^{(n)}\rangle: n\in N\}$使得

(6.2.1) 每一序列$\{x_{\alpha_n i}^{(n)}\}_i$收敛于 x_n 且所有的 $x_{\alpha_n i}^{(n)}\neq x_n$.

(6.2.2) $\mathcal{P}$ 的每一元至多与一个序列$\{x^{(n)}_{\alpha_n i}\}_i$相交.

令

T=$[x_n]\cup\{x^{(n)}_{\alpha_n i}: i, n\in N\}$.

由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网, 所以 T 同胚于 S_2, 从而 X 不是 Fréchet 空间, 矛盾. 因此, Y 中的收敛序列是有限的, 故 Y 是离散的. ▮

推论 5.2.7 设 X 是 Fréchet 的正则空间, 那么 X 具有局部可数 k 网当且仅当 X 具有星可数 k 网且不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

证明. 设空间 X 具有局部可数 k 网, 易验证 X 具有星可数 k 网. 由于 S_{ω_1} 不是局部可分空间, 所以 X 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 反之, 设空间 X 具有星可数 k 网且不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 由引理 5.2.6 及(6.1), X 是$\aleph_0$空间族的拓扑和, 所以 X 具有局部可数 k 网. ▮

定理 5.2.8(刘川, Tanaka[1996c]; Sakai[1997a]) 对于正则空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的闭映象.

(2) X 是具有星可数 k 网的 Fréchet 空间.

(3) X 是具有点可数可分 k 网的 Fréchet 空间.

证明. 由定理 4.2.6 和引理 4.1.3 知(1)$\Rightarrow$(3). 由定理 5.2.2, 引理 4.2.5 和定理 4.2.6 的(3)$\Rightarrow$(1)知(2)$\Rightarrow$(1). 下面证明(3)$\Rightarrow$(2).

让 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数的可分 k 网. 由引理 5.2.6, X=Z$\cup$Y, 其中 Z 是 X 的开子集且可表示为$\aleph_0$空间族$\{Z_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$的拓扑和, 而 Y=X$\setminus$Z 是 X 的闭离散子空间. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 让 D_α 是 Z_α 的可数稠子集, 对于每一$\Lambda'\subset\Lambda$, 让 $D(\Lambda')=\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}D_\alpha$, 则

(8.1) 存在子标集Λ的互不相交族$\{\Lambda_\gamma: \gamma\in\Gamma\}$使得每一$\Lambda_\gamma$是可数的, 且对于每一$P\in\mathcal{P}$有$|\{\gamma\in\Gamma: P\cap D(\Lambda_\gamma)\neq\varnothing\}|\leq 1$.

考虑在Λ上的两元关系~: 对于α, $\beta\in\Lambda$, $\alpha\sim\beta$当且仅当存在Λ的有限子集$\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\}$和 $\mathcal{P}$ 的有限子集$\{P_0, \ldots, P_{n-1}\}$使得$\alpha_0=\alpha$, $\alpha_n=\beta$, 且对于 $0\leq i<n$ 有 $P_i\cap D_{\alpha_i}\neq\varnothing$和$P_i\cap D_{\alpha_{i+1}}\neq\varnothing$. 则~是$\Lambda$上的等价关系. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 因为 D_α 是可数的且 $\mathcal{P}$ 是点可数的,

$\{P\in\mathcal{P}: P\cap D_\alpha\neq\varnothing\}$是可数的. 此外, 对于每一$P\in\mathcal{P}$, 因为 P 是可分的且$\{Z_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$是 X 的两两互不相交的开子集族, 所以$\{\alpha\in\Lambda: P\cap D_\alpha\neq\varnothing\}$也是可数的. 于是易验证每一等价类是可数集. 让$\{\Lambda_\gamma: \gamma\in\Gamma\}$是这些等价类的族, 则它符合(8.1)的要求.

不妨设 X 满足下述条件

(8.2) 对于每一$P\in\mathcal{P}$, $|\{\alpha\in\Lambda: P\cap D_\alpha\neq\varnothing\}|\le 1$.

对于每一$\alpha\in\Lambda$, 让$\mathcal{P}_\alpha=\{\mathrm{cl}_{Z_\alpha}(P\cap Z_\alpha): P\in\mathcal{P}, P\cap D_\alpha\neq\varnothing\}$. 由引理 5.1.14, $\mathcal{P}_\alpha$是Z_α的可数 k 网. 让$\mathcal{F}=\{\{y\}: y\in Y\}\cup(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha)$. 则$\mathcal{F}$是 X 的星可数覆盖.

(8.3) $\mathcal{F}$是 X 的 wcs*网.

设X中非平凡的序列$\{x_n\}$收敛于点$x\in U$, 其中U是X的开子集, 若存在$\alpha\in\Lambda$使得$x\in Z_\alpha$, 由于Z_α是X的开子集且$\mathcal{P}_\alpha$是Z_α的k网, 存在$P\in\mathcal{P}_\alpha$使得$P\subset U$且P含有序列$\{x_n\}$的子序列. 于是可以设$x\in Y$. 因为 Y 是 X 的闭离散子空间, 不妨设$\langle x_n\rangle\subset Z$. 设$\{\alpha\in\Lambda:$ 存在$n\in N$使得$x_n\in Z_\alpha\}$是无限的, 那么可选取$\{x_n\}$的子序列$\{y_n\}$和Λ中的序列$\{\alpha_n\}$使得每一 $y_n\in Z_{\alpha_n}$, 其中当$n\neq m$时有$\alpha_n\neq\alpha_m$. 因为每一D_{α_n}是Z_{α_n}的序列稠子集, 所以存在D_{α_n}中的序列$\{y_{nm}\}$收敛于y_n, 于是$x\in\mathrm{cl}\{y_{nm}: n, m\in N\}$, 从而可以选取$\{y_{nm}\}$中的序列$\{y_{n_j m_j}\}$收敛于 x. 由于$\mathcal{P}$是 X 的 k 网, 存在$P\in\mathcal{P}$使得 P 含有$\{y_{n_j m_j}\}$的子序列, 因此 P 与无限个$D_{\alpha_n}$相交, 这与(8.2)相矛盾. 这说明$\{\alpha\in\Lambda:$ 存在$n\in N$使得$x_n\in Z_\alpha\}$是有限集. 不失一般性, 我们可以设存在$\alpha\in\Lambda$满足$\langle x_n\rangle\subset Z_\alpha$. 让 $E=\{x\}\cup Z_\alpha$. 则 D_α 是 E 的稠子集. 由引理 5.1.14, 集族$\{\mathrm{cl}_E(P\cap E): P\in\mathcal{P}, P\cap D_\alpha\neq\varnothing\}$是 E 的 k 网, 所以存在$P\in\mathcal{P}$使得$P\cap D_\alpha\neq\varnothing$, $\mathrm{cl}_E(P\cap E)\subset U$且$\mathrm{cl}_E(P\cap E)$含有无限项$x_n$, 于是$\mathrm{cl}_{Z_\alpha}(P\cap Z_\alpha)\subset U$且$\mathrm{cl}_{Z_\alpha}(P\cap Z_\alpha)$含有无限项$x_n$, 故$\mathcal{F}$是 X 的 wcs*网.

由引理 2.1.6, X 具有星可数 k 网. ▌

例 5.2.9 (1) 具有星可数 k 网的 k 空间$\not\Rightarrow$由 k 且$\aleph_0$空间族控制.

如例 1.5.8 中的半圆盘拓扑空间 X. X 是具有局部可数 k 网的第一可数空间. 若 X 由 k 且$\aleph_0$空

间族控制, 由引理 4.2.5, X 有由 $\aleph_0$ 子空间组成的遗传闭包保持闭覆盖 $\mathcal{F}$. 令

$D=\{x\in X : (\mathcal{F})_x$ 不是有限的$\}$,

$\mathcal{G}=\{cl(F\setminus D) : F\in\mathcal{F}\}\cup\{\{x\} : x\in D\}$.

由引理 4.1.3, D 是 X 的闭离散子空间. 若存在 $y\in X$ 和 $\mathcal{F}$ 的可数子集 $<F_n>$ 使得 $y\in\bigcap_{n\in N} cl(F_n\setminus D)$, 设 y 在 X 中的局部基是 $<V_n>$, 那么存在 X 中两两互不相同的点组成的序列 $\{y_n\}$ 使得每一 $y_n\in V_n\cap(F_n\setminus\{y\})$, 矛盾. 从而, $\mathcal{G}$ 是 X 的点有限且闭包保持的闭子集族, 故 $\mathcal{G}$ 是 X 的局部有限的闭覆盖. 令 $G=\oplus\mathcal{G}$, $g:G\to X$ 是自然映射, 则 g 是有限到一的闭映射. 由推论 2.1.7, G 具有点可数基 $\mathcal{B}$. 让 $\mathcal{H}=g(\mathcal{B})$, 则 $\mathcal{H}$ 是 X 的点可数覆盖. 又由于 g 是序列商映射, $\mathcal{H}$ 是 X 的点可数 cs*网, 矛盾.

(2) 具有点可数的紧 k 网的 k 空间 $\not\Rightarrow$ 具有星可数 k 网; 如例 1.5.4. ∎

问题 5.2.10 设正则空间 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间, 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的, 那么 X 是否具有星可数 k 网?

5.3 乘积空间的 k 空间性质

两个 k 空间的乘积空间未必是 k 空间, Michael[1973]提出下述问题.

问题 5.3.1 设 X 和 Y 是 k 空间, 寻求 $X\times Y$ 是 k 空间的充分且必要条件.

在某些广义度量空间类中, 该问题获得了较满意的解, 尤其是具有确定 k 网的空间所获得的条件更为简明, 为叙述的方便起见, 我们做下述定义.

定义 5.3.2 称空间列 $\{X_i\}$ 满足 Tanaka 条件, 如果 $\{X_i\}$ 满足下述条件之一:

(1) 所有的 X_i 都是第一可数空间.

(2) 所有的 X_i 都是 k 空间, 并且至多有限个 X_i 不是紧空间, 至多一个 X_i 不是局部紧空间.

(3) 所有的 X_i 都是局部 k_ω 空间, 并且至多只有有限个 X_i 不是紧空间.

特殊的情形是两个空间作为一组满足 Tanaka 条件.

由引理 1.4.5, 我们有

引理 5.3.3 若空间列 $\{X_i\}$ 满足 Tanaka 条件, 则 $\prod_{i\in N} X_i$ 是 k 空间. ∎

本节主要讨论引理 5.3.3 的逆何时成立. Tanaka[1976]证明了在具有 σ 局部有限 k 网的正则空

间类中引理 5.3.3 的逆成立. Gruenhage[1980]证明了在 Lašnev 空间空间类中引理 5.3.3 的逆成立等价于集论假设 BF(ω_2)不成立. Lašnev 空间或度量空间的商 s 映象都具有点可数 k 网. 是否可在具有点可数 k 网的空间上获得更一般的结果?

猜测 5.3.4 设 X 和 Y 是具有点可数 k 网的 k 空间, 则 X×Y 是 k 空间当且仅当空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

本节的内容由三部分组成, 一是介绍在 ZFC 中关于猜测 5.3.4 的绝对性结果, 二是介绍在集论假设 BF(ω_2)下关于猜测 5.3.4 的相对性结果, 三是讨论可数积的 k 空间性质.

引理 5.3.5 设 $S_\omega \times Z$ 是 k 空间, 如果$\langle Z_n\rangle$是 Z 中某点递减的网, 则某一 cl(Z_n)是可数紧的.

证明. 记 $S_\omega=\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\in N} T_n)$. 置 $Y=\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\in N} T_n\times\{n\})$. 集合 Y 赋予下述拓扑: $Y\setminus\{x_0\}$中的点是 Y 的孤立点, x_0在 Y 中的邻域基元形如$\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\geq i} T_n\times\{n\})$, $i\in N$. 那么 Y 是具有可数基的正则空间, 于是 Y 是度量空间. 令 $A=\{(x, (x, n))\in S_\omega\times Y : x\in T_n, n\in N\}$, 则 $A\subset S_\omega\times Y$ 且$(x_0, x_0)\in \mathrm{cl}(A)\setminus A$, 从而 A 不是 $S_\omega\times Y$ 的闭子集. 另一方面, 我们证明对于 $S_\omega\times Y$ 的任一非空紧子集 K, $K\cap A$ 是 K 的闭子集. 由于 K 是 $S_\omega\times Y$ 的非空紧子集, 分别存在 S_ω 和 Y 的非空紧子集 K_1 与 K_2 使得 $K\subset K_1\times K_2$. 由 S_ω 的定义知对于每一 $n\in N$, 若 $x_n\in T_n$, 则$\langle x_n\rangle$是 S_ω 的离散子集, 从 K_1 的紧性知存在 $i\in N$ 使得 $K_1\cap(\bigcup_{n\geq i} T_n)=\varnothing$. 记 $B=(K_1\times K_2)\cap A$. 对于任意的 $a\in K_1\times K_2\setminus B$, 我们断言存在 a 在 $S_\omega\times Y$ 中的开邻域 V 使得 $V\cap B=\varnothing$. 事实上, 设 $a=(a_1, a_2)$. 若 $a_2=x_0$, 令 $V_1=S_\omega\times(\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\geq i} T_n\times\{n\}))$, 则 V_1 是 a 在 $S_\omega\times Y$ 中的开邻域, 如果存在 $b=(b_1, b_2)\in V_1\cap B$, 从 $b_1\in K_1$ 知存在 $i_0<i$ 使得 $b_1\in T_{i_0}$, 再从 $b\in A\cap V_1$ 知 $b_2=(b_1, i_0)\in\bigcup_{n\geq i}(T_n\times\{n\})$, 于是 $i_0\geq i$, 矛盾, 所以 $V_1\cap B=\varnothing$; 若 $a_2\neq x_0$ 且 $a_1\neq x_0$, 令 $V_2=\{a\}$, 则 V_2 是 a 在 $S_\omega\times Y$ 中的开邻域, 显然有 $V_2\cap B=\varnothing$; 若 $a_2\neq x_0$ 且 $a_1=x_0$, 设 $a_2=(x_{nm}, n)\in T_n\times\{n\}$, 令 $V_3=(S_\omega\setminus\{x_{nm}\})\times\{a_2\}$, 则 V_3 是 a 在 $S_\omega\times Y$ 中的开邻域, 如果存在 $c=(c_1, c_2)\in V_3\cap B$, 则 $c_2=a_2$, 从 $c\in A\cap V_3$ 知 $c_1=x_{nm}\in S_\omega\setminus\{x_{nm}\}$, 矛盾, 所以 $V_3\cap B=\varnothing$. 因此, B 是 $K_1\times K_2$ 的闭子集. 从而 $K\cap A$ 是 K 的闭子集. 这说明 $S_\omega\times Y$ 不是 k 空

间.

现在, 设<Z_n>是空间 Z 中某点 z_0递减的网, 若每一 cl(Z_n)均不是 Z 的可数紧的子空间, 那么存在{n}的子序列{n_k}及 Z 的无限可数闭离散子空间列{C_k}使得每一 $C_k \subset \mathrm{cl}(Z_{n_k}) \setminus \{z_0\}$且{$C_k$}中的元是两两互不相交的. 令 $Z_0=\{z_0\}\bigcup(\bigcup_{k\in N} C_k)$, 则 Z_0是 Z 的闭子空间且同胚于上面构造的空间 Y, 于是 $S_\omega \times Z$ 不是 k 空间, 矛盾. 故某一 cl(Z_n)是可数紧的. ▌

引理 5.3.6 设 X 是具有可数 k 网的 k 空间. 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部紧的, 则 X 是 k_ω 空间.

证明. 由引理 4.2.4, X 具有可数 k 网<P_i>使得每一 cl(P_i)是 X 的紧子集. 因为 X 是 k 空间, 所以 X 关于可数族$\{\bigcup_{i\le n} \mathrm{cl}(P_i) : n\in N\}$具有弱拓扑, 故 X 是 k_ω空间. ▌

为了简化 Tanaka 条件, 我们引入下述的 Shibakov 条件. 称空间 X 满足 Shibakov 条件, 若 X $\times S_\omega$是 k 空间, 则 X 是局部$\aleph_0$空间. 该条件是 Shibakov[1995a]在讨论乘积空间的 k 空间性质时特别研究的条件, 其作用可从下述引理中得到体现.

引理 5.3.7 设 X, Y 都是具有点可数 k 网的正则空间. 若 X×Y 是 k 空间且 X, Y 都满足 Shibakov 条件, 则空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

证明. 由推论 2.1.4, 空间 X 和 Y 都是序列空间. 先设空间 X 和 Y 中至少有一空间不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω. 如果 X 含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_ω, Y 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 则由推论 2.1.11, Y 是第一可数空间且 $S_2 \times$Y 或 $S_\omega \times$Y 是 k 空间. 由于 S_ω 是 S_2 的完备映象, 再由引理 1.4.4, $S_\omega \times$Y 是 $S_2 \times$Y 的完备映象, 而 k 空间性质是完备映射不变性质和完备映射逆不变性质, 所以 $S_\omega \times$Y 是 k 空间. 由引理 5.3.5, Y 是局部紧空间. 如果 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, Y 含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_ω, 则由上述同样的理由知 X 是局部紧空间. 如果 X 和 Y 都不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 则由推论 2.1.11 知 X 和 Y 都是第一可数空间. 所以空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

现在, 设空间 X 和 Y 都含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_ω, 于是 X$\times S_\omega$ 和 Y$\times S_\omega$ 都是 k 空间. 由 Shibakov 条件, X 和 Y 都是局部$\aleph_0$空间, 由引理 5.3.5, X 和 Y 的每一第一可数的闭子空间是局部

紧的, 再由引理 5.3.6, X 和 Y 都是局部 k_ω 空间, 所以空间对(X, Y)也满足 Tanaka 条件. ∎

定理 5.3.8(刘川, 林寿[1997]) 设 $X\times Y$ 是正则的 k 空间. 若空间 X, Y 满足下述条件之一, 则空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

(1) 具有点可数 cs 网的序列空间.

(2) 具有点可数 cs*网的 Fréchet 空间.

(3) 具有紧可数 cs*网的空间.

证明. 由引理 2.1.6 和引理 5.3.7, 为证明空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件, 只须证明满足定理条件的空间满足 Shibakov 条件. 即, 若 $X\times S_\omega$ 是正则的 k 空间且 X 满足条件(1)~(3)之一, 则 X 是局部 $\aleph_0$ 空间.

(1) 设 X 是具有点可数 cs 网的序列空间. 由推论 2.4.4, 存在度量空间 M 和序列覆盖的商 s 映射 $f: M\to X$. 让 $\mathcal{B}$ 是 M 的 σ 局部有限基. 对于每一 $x\in X$ 和 $z\in f^{-1}(x)$, 存在 $\mathcal{B}$ 的子集 $\langle B_n\rangle$ 是 z 在 M 中递减的局部基, 由引理 5.3.5 和推论 2.1.13, 某一 $cl(B_n)$ 是 X 的紧可度量子空间, 于是 B_n 是 X 的可分度量子空间. 从而 $\{P\in f(\mathcal{B}): P$ 是 X 的可分度量子空间$\}$ 构成了 X 的点可数 cs 网. 再由定理 5.1.9, X 是局部 $\aleph_0$ 空间.

(2) 设 X 是具有点可数 cs*网的 Fréchet 空间. 由引理 2.1.10 及(1)所证知 X 是具有点可数的可分 cs*网的 Fréchet 空间, 由定理 5.1.16, X 具有局部可数 k 网, 故 X 是局部 $\aleph_0$ 空间.

(3) 设 X 是具有紧可数 cs*网的空间. 由于 $X\times S_\omega$ 是 k 空间, 由引理 5.3.5 和推论 2.1.13, X 的每一第一可数的闭子空间是局部紧的. 由引理 4.2.4, X 具有紧可数的 cs*网 $\mathcal{P}$ 使得 $\mathcal{P}$ 的每一元的闭包是 X 的紧子集, 从而 $\mathcal{P}$ 是 X 的星可数 cs*网, 由推论 5.1.12, X 是局部 $\aleph_0$ 空间. ∎

推论 5.3.9 空间$(S_2)^\omega$ 和$(S_\omega)^\omega$ 都不是 k 空间.

证明. 由于 S_ω 是 S_2 的完备映象, 所以$(S_\omega)^\omega$ 是$(S_2)^\omega$ 的完备映象, 于是$(S_\omega)^\omega$ 是 k 空间当且仅当$(S_2)^\omega$ 是 k 空间. 若$(S_\omega)^\omega$ 是 k 空间, 则 $S_\omega\times(S_\omega)^\omega$ 是 k 空间, 而$(S_\omega)^\omega$ 具有可数 cs*网, 由定理 5.3.8, $(S_\omega)^\omega$ 是局部 k_ω 空间, 这与引理 1.4.5 相矛盾. 故$(S_\omega)^\omega$ 不是 k 空间. ∎

推论 5.3.10(刘川, Tanaka[1998b]) 设 X^2 是正则的 k 空间, 若 X 满足下述条件之一, 则 X 满

是 Tanaka 条件, 即 X 是第一可数空间或局部 k_ω 空间.

(1) 具有点可数 k 网的 Fréchet 空间.

(2) 具有紧可数 k 网的 k 空间.

证明. 若空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 由推论 2.1.11, X 是第一可数空间. 若 X 含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 则 $S_\omega \times X$ 是 k 空间. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的满足(1)或(2)的关于有限交封闭的 k 网, 由引理 5.3.5, 推论 2.1.13 和引理 4.2.4, 不妨设 $\mathcal{P}$ 的每一元是闭包是 X 的紧可度量子集.

(1) 设 $\mathcal{P}$ 是点可数的, 则 X 是具有点可数的可分 k 网的 Fréchet 空间, 由定理 5.2.8 知 X 具有星可数 k 网. 由例 1.5.2, $(S_{\omega_1})^2$ 不是 k 空间, 于是 X 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 再由推论 5.2.7, 定理 5.1.16 和定理 5.3.8, X 是局部 k_ω 空间.

(2) 设 $\mathcal{P}$ 是紧可数的, 于是 $\mathcal{P}$ 是星可数的. 由引理 4.3.4, 设$\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$和$\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$分别是 $\mathcal{P}$ 和 X 的星可数分解. 令 $\mathcal{F}$={cl(P) : P$\in\mathcal{P}$}, 则 $\mathcal{F}$ 是 X 的紧 k 网. 对于每一 P$\in\mathcal{P}$, 若存在 $\mathcal{P}$ 的不可数子族$\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}$使得每一 cl(P)$\cap$cl($P_\alpha$)$\neq\varnothing$, 由于$\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$是紧有限的. 不妨设每一 $P_\alpha \in \mathcal{P}_\alpha$. 对于每一$\alpha < \omega_1$, 由于 cl($P_\alpha$)是可度量的, 存在 P_α 中的序列 T_α 收敛于 cl(P)中的某点, 不妨设 cl(P)$\cap T_\alpha=\varnothing$. 令 F=cl(P)$\bigcup(\bigcup_{\alpha<\omega_1} T_\alpha)$. 由于 X 是 k 空间, 且$\{T_\alpha : \alpha < \omega_1\}$是紧有限的, 所以 F 是 X 的闭子集. 定义;f:F$\to$F/cl(P)是自然商映射, 那么 f 是完备映射且 F/cl(P)同胚于 S_{ω_1}, 从而 F^2 是$(S_{\omega_1})^2$的完备逆映象. 由例 1.5.2, $(S_{\omega_1})^2$不是 k 空间, 于是 F^2 不是 k 空间, 矛盾. 故 $\mathcal{F}$ 是 X 的星可数的紧 k 网. 因此, $\mathcal{F}$ 是 X 的紧可数 cs*网. 由定理 5.3.8, X 是局部 k_ω 空间. █

推论 5.3.11(刘川, Tanaka[1998b]) (1) 设 X 是具有紧可数 k 网的正则空间. 若 $X\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间, 那么 X 是局部 k_ω 空间.

(2) $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间当且仅当若 X 是具有点可数 k 网的正则空间, 则 $X\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间的充分且必要条件是 X 是局部紧空间.

证明. (1) 设 $\mathcal{P}$是空间 X 的关于有限交封闭的紧可数 k 网. 令 $\mathcal{F}$={cl(P) : P$\in\mathcal{P}$ 且 cl(P)是 X 的

紧可度量子空间}. 由于 $X\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间, 所以 $X\times S_{\omega}$ 是 k 空间. 又由于$(S_{\omega_1})^2$不是 k 空间, 于是 X 不含有闭子空间 F 使得 S_{ω_1} 是 F 的完备映象. 由推论 5.3.10(2)所证, $\mathscr{F}$ 是 X 的星可数的紧 k 网, 故 X 是局部 k_{ω} 空间.

(2) 充分性是显然的. 下面证明必要性. 设 $S_{\omega}\times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间. 由引理 1.4.5, 若 X 是局部紧空间, 则 $X\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间. 若 X 是具有点可数 k 网的正则空间且 $X\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间, 于是 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_{ω}. 由推论 2.1.11, X 具有点可数基. 因为 $X\times S_{\omega}$ 也是 k 空间, 由引理 5.3.5, X 是局部紧空间. ∎

空间 $S_{\omega}\times S_{\omega_1}$ 是否是 k 空间等价于集论假设 BF(ω_2). 本节第二部分介绍附加集论假设 BF(ω_2)的一些结果. 让 $^{\omega}\omega$ 是从 ω 到 ω 内的所有函数组成的集合. 对于 f, $g\in {}^{\omega}\omega$, 定义 $f\le g$ 当且仅当集$\{n\in\omega : f(n)>g(n)\}$是有限的. BF($\omega_2$)是下述断言: 对于 $F\subset {}^{\omega}\omega$, 如果$|F|<\omega_2$, 则存在 $g\in {}^{\omega}\omega$ 使得对于所有的 $f\in F$ 有 $f\le g$. 由集论拓扑的知识(Kunen[1980]), 有下述事实.

(1) (CH)$\Rightarrow\neg$ BF(ω_2).

(2) (MA+$\neg$ CH)$\Rightarrow$BF(ω_2).

引理 5.3.12(Gruenhage[1980]) BF(ω_2)成立当且仅当 $S_{\omega}\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间.

证明. 记空间 $X=S_{\omega}\times S_{\omega_1}$, 而

$S_{\omega}=\{s_0\}\cup\{s_{nm} : n, m\in\omega\}$, 其中对于每一 $n\in\omega$, 序列$\{s_{nm}\}_m$收敛于 s_0.

$S_{\omega_1}=\{t_0\}\cup\{t_{\alpha m} : \alpha<\omega_1, m\in\omega\}$, 其中对于每一$\alpha<\omega_1$, 序列$\{t_{\alpha m}\}_m$收敛于 t_0.

对于每一 $f\in {}^{\omega}\omega$ 和 $g\in {}^{\omega_1}\omega$, 定义

$U_f=\{s_0\}\cup\{s_{nm} : m\ge f(n)\}$, $V_g=\{t_0\}\cup\{t_{\alpha m} : m\ge g(\alpha)\}$.

设 BF(ω_2)不成立, 则存在 $^{\omega}\omega$ 的子族$\{f_{\alpha}\in {}^{\omega}\omega : \alpha<\omega_1\}$使得如果 $g\in {}^{\omega}\omega$, 则有$\alpha<\omega_1$ 满足对无限个 $n\in\omega$ 有 $f_{\alpha}(n)>g(n)$. 对于每一$\alpha<\omega_1$, 让 $G_{\alpha}=\{(s_{nm}, t_{\alpha m}) : m\le f_{\alpha}(n)\}$, 则 G_{α} 是 X 的闭子集. 令 $G=\bigcup_{\alpha<\omega_1}G_{\alpha}$. 设 K 是 X 的紧子集, 则 K 仅与有限个 G_{α} 相交, 于是 $K\cap G$ 是 X

的闭子集. 设 U 是 X 中含有点(s_0, t_0)的开子集, 那么存在 f∈ $^{\omega}\omega$ 和 g∈ $^{\omega_1}\omega$ 使得 $U_f \times V_g \subset$U, 从而存在 $\alpha < \omega_1$ 使得对于无限个 n∈ ω 有 f_α(n)>f(n), 所以存在 j∈ ω 使得 g(α) ≤j, f_α(j)≥f(j), 所以($s_{jf_\alpha(j)}$, $t_{\alpha j}$)∈ G_α ∩ U, 因此(s_0, t_0)∈cl(G)╲G, 故 G 不是 X 的闭子集. 这说明 X 不是 k 空间.

反之, 设 BF(ω_2)成立. 若 X 中存在非闭的序列闭集 H. 由于 S_ω, S_{ω_1} 都是序列空间, 所以对于每一 s∈ S_ω 和 t∈ S_{ω_1}, ({s}×S_{ω_1})∩H 和(S_ω×{t})∩H 都是 X 的闭子集, 于是 cl(H)=H∪{(s_0, t_0)}, 故不妨设 H 仅含有 X 中的孤立点.

对于每一 $\alpha < \omega_1$, 因为 S_ω×({t_0}∪{$t_{\alpha m}$: m∈ ω })是序列空间, 存在 f_α ∈ $^{\omega}\omega$ 和 n_α ∈ ω 使得 U_{f_α}×({$t_{\alpha m}$: m≥ n_α })∩H=∅. 由于 BF(ω_2), 存在 f∈ $^{\omega}\omega$ 使得对于所有的 $\alpha < \omega_1$ 有 f_α ≤f, 于是存在 i_α ∈ ω 使得当 i≥ i_α 时有 f_α(i)≤f(i). 对于每一 $\alpha < \omega_1$, 存在 n'_α ≥ n_α 使得{(s_{im}, $t_{\alpha j}$) : i< i_α, m∈ ω, j≥ n'_α }∩H=∅. 定义 g∈ $^{\omega_1}\omega$ 使得 g(α)= n'_α. 设(s_{im}, $t_{\alpha j}$)∈ $U_f \times V_g$. 如果 i< i_α, 由于 j≥ n'_α, 于是(s_{im}, $t_{\alpha j}$)∉H. 如果 i≥ i_α, 那么 f_α(i)≤f(i)≤m 且 j≥ n_α, 于是(s_{im}, $t_{\alpha j}$)∉H, 所以($U_f \times V_g$)∩H=∅, 矛盾. 因此, X 是序列空间. █

引理 5.3.13(刘川, 林寿[1997]) 设 S_ω×X 是正则的 k 空间, 则下述条件相互等价:

(1) $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间.

(2) 若 X 有点可数 k 网 $\mathcal{P}$, 则对于每一 x∈ X, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子集 $\mathcal{P}_x$ 使得 x∈int(∪ $\mathcal{P}_x$).

(3) 若 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间, 则 X 是局部 k_ω 空间.

(4) 若 X 有紧可数 k 网, 则 X 是局部 k_ω 空间.

证明. 记 S_ω={s_0}∪{s_{nm} : n, m∈ ω }, 其中对于每一 n∈ ω, 序列{s_{nm}}$_m$ 收敛于 s_0. 因为 S_ω×X 是 k 空间, 由引理 5.3.5, X 的每一第一可数的闭子空间是局部可数紧的.

(1)⇒(2). 设 $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间. 由引理 5.3.12, BF(ω_2)不成立. 让 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 k 网, 那么

(13.1) 对于每一 A⊂X, cl(A)=∪{cl(D) : D 是 A 的可数子集}

让 B=$\cup$\{cl(D) : D 是 A 的可数子集\}, 则 B$\subset$cl(A)$\subset$cl(B). 设 X 中的序列\{b_n\}收敛于 b, 若 $\langle b_n\rangle\subset$B, 则存在 A 的可数子集 D 使得 cl$\langle b_n\rangle\subset$cl(D)$\subset$B, 于是 b$\in$B, 所以 B 是 X 的序列闭集. 由推论 2.1.4, X 是序列空间, 从而 B 是 X 的闭子集, 因此 cl(A)=B.

若(2)不成立, 则存在 x$\in$X 使得对于$\mathcal{P}$的任一可数子族$\mathcal{P}_x$有 x$\notin$int($\cup\mathcal{P}_x$). 由于 x$\in$cl(X$\setminus$\{x\})及(13.1), 存在 X$\setminus$\{x\}的可数子集 D_0 使得 x$\in$cl(D_0). 让$\mathcal{P}_0$=\{P$\in\mathcal{P}$: P$\cap$($D_0\cup$\{x\})$\neq\varnothing$\}, 则 $\mathcal{P}_0$是可数的. 于是 x$\in$cl(X$\setminus$($\cup\mathcal{P}_0$)), 存在 X$\setminus$($\cup\mathcal{P}_0$)的可数子集 D_1 使得 x$\in$cl(D_1). 让$\mathcal{P}_1$=\{P$\in\mathcal{P}$: P$\cap D_1\neq\varnothing$\}, 则$\mathcal{P}_1$是可数的, 从而 x$\in$cl(X$\setminus$($\cup$($\mathcal{P}_0\cup\mathcal{P}_1$))). 由超限归纳法, 可选取 X 的子集族\{D_α : $\alpha<\omega_1$\}使得

(13.2) 对于每一$\alpha<\omega_1$, x$\in$cl(D_α), x$\notin D_\alpha$ 且 D_α 是可数的.

(13.3) 对于每一 P$\in\mathcal{P}$, P 至多与一个 D_α 相交.

由于 BF(ω_2)不成立, 存在${}^\omega\omega$的子族\{$f_\alpha\in{}^\omega\omega$: $\alpha<\omega_1$\}使得如果 g$\in{}^\omega\omega$, 则有$\alpha<\omega_1$满足对无限个 n$\in\omega$ 有 f_α(n)>g(n). 置 H_α=\{(s_{nm}, $d_{\alpha i}$) : m$\le f_\alpha$(n)且 i$\le$n\}, 其中 $d_{\alpha i}$表示 D_α 中的第 i 项. 让 H=$\bigcup_{\alpha<\omega_1}H_\alpha$, 则 H$\subset S_\omega\times$X. 如果 K 是 $S_\omega\times$X 的紧子集, 那么存在 n$\in$N 和$\mathcal{P}$的有限子集$\mathcal{F}$使得 K$\subset L_n\times$($\cup\mathcal{F}$), 其中 L_n=\{s_0\}$\cup$\{s_{im} : i$\le$n 且 m$\in\omega$\}. 由(13.3), ($L_n\times$($\cup\mathcal{F}$))$\cap$H 是有限的, 于是 K$\cap$H 是有限的, 因为 $S_\omega\times$X 是 k 空间, 所以 H 在 $S_\omega\times$X 中是闭的. 现在, 设 U 是 $S_\omega\times$X 中含有点(s_0, x)的开子集, 那么存在 s_0 在 S_ω 中的邻域 U_g 和 x 在 X 中的邻域 U_x 使得 $U_g\times U_x\subset$U, 其中对于某个 g$\in{}^\omega\omega$ 有 U_g=\{s_0\}$\cup$\{s_{nm} : m$\ge$g(n)\}, 于是存在$\alpha<\omega_1$使得对于无限个 n$\in\omega$ 有 f_α(n)>g(n). 取 $d_{\alpha i}\in U_x\cap D_\alpha$, 并且选取 j>i 满足 f_α(j)>g(j), 那么($s_{jf_\alpha(j)}$, $d_{\alpha i}$)$\in$($U_g\times U_x$)$\cap$H$\subset$U$\cap$H, 于是(s_0, x)$\in$cl(H)$\setminus$H, 从而 H 不是 $S_\omega\times$X 的闭子集, 矛盾.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 X 是具有点可数 k 网$\mathcal{P}$的 Fréchet 空间. 由推论 2.1.13 和引理 4.2.4, 不妨设$\mathcal{P}$的每一元的闭包是 X 的紧可度量子空间. 由(2), 对于每一 x$\in$X, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子族 $\mathcal{P}_x$ 使得 x$\in$int($\cup\mathcal{P}_x$). 让 V 是 X 的开子集使得 x$\in$V$\subset$cl(V)$\subset$int($\cup\mathcal{P}_x$), 由引理 5.1.14, cl(V)有可数的

紧 k 网, 故 cl(V)是 k_ω 空间. 因此, X 是局部 k_ω 空间.

(2)$\Rightarrow$(4). 设 X 具有紧可数 k 网 $\mathcal{P}$. 由推论 2.1.13 和引理 4.2.4, 不妨设 $\mathcal{P}$ 的每一元的闭包是 X 的紧度量子空间. 由(2), $\mathcal{P}$ 是局部可数的, 于是 X 具有局部可数的紧 k 网. 从而, X 是局部 k_ω 空间.

(3)或(4)$\Rightarrow$(1). 因为 S_{ω_1} 不是局部 k_ω 空间, 所以若(3)或(4)成立, 那么 $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间. ∎

定理 5.3.14(林寿[1998b]; 刘川, 林寿[1997]; 刘川, Tanaka[1996c]) 下述条件相互等价:

(1) $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间.

(2) 若 X, Y 都是具有点可数 k 网的正则的 Fréchet 空间或具有紧可数 k 网的正则空间, 则 X $\times$Y 是 k 空间当且仅当空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

证明. 由引理 5.3.3, 引理 5.3.13 和引理 5.3.7 知(1)$\Rightarrow$(2). 设 $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 是 k 空间. 显然, S_ω 和 S_{ω_1} 都是具有紧可数 k 网的 Fréchet 空间, 但是空间对(S_ω, S_{ω_1})不满足 Tanaka 条件. 故(2)$\Rightarrow$(1). ∎

推论 5.3.15 $S_\omega \times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间当且仅当若 X 和 Y 是具有星可数 k 网的正则空间, 则 X $\times$Y 是 k 空间的充要条件是空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

证明. 只须注意到下述两点, (1) 若空间 X 具有星可数 k 网, 则 X 具有紧可数 k 网; (2) S_ω 和 S_{ω_1} 都是具有星可数 k 网的 k 空间. ∎

问题 5.3.16(刘川, Tanaka[1998b]) 具有点可数 k 网的正则的 Fréchet 空间是否具有紧可数 k 网?

本节最后一部分讨论可数积的 k 空间性质.

引理 5.3.17 设空间列{X_i}具有点可数 k 网. 若 $\prod_{i\in N} X_i$ 是 k 空间, 则存在 n$\in$N 使得 $\prod_{i\geq n} X_i$ 是第一可数空间.

证明. 由推论 5.3.9, 存在 n$\in$N 使得当 i$\geq$n 时空间 X_i 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 再由推论 2.1.11 知 X_i 是第一可数空间, 从而 $\prod_{i\geq n} X_i$ 是第一可数空间. ∎

推论 5.3.18 设空间 X 具有点可数 k 网，则 X^{ω} 是 k 空间当且仅当 X 是第一可数空间. ▮

定理 5.3.19 设$\prod_{i\in N} X_i$ 是正则的k空间. 若每一空间X_i满足下述条件之一，则空间列$\{X_i\}$满足 Tanaka 条件.

(1) 具有点可数 cs 网的序列空间.

(2) 具有点可数 cs*网的 Fréchet 空间.

(3) 具有紧可数 cs*网的空间.

证明. 由于每一空间 X_i 具有条件(1)~(3)之一，于是 X_i 具有点可数 k 网. 由于 $X_1\times\prod_{i\geq 2} X_i$ 是 k 空间.

(19.1) 如果 X_1 和$\prod_{i\geq 2} X_i$ 都是强 Fréchet 空间，则所有的 X_i 都是强 Fréchet 空间，由推论 2.1.7，所有的 X_i 都是第一可数空间.

(19.2) 如果 X_1 和$\prod_{i\geq 2} X_i$ 中恰有一个空间是强 Fréchet 空间，若 X_1 不是强 Fréchet 空间，那么$\prod_{i\geq 2} X_i$ 是强 Fréchet 空间，于是$\prod_{i\geq 2} X_i$ 是第一可数空间且由推论 2.1.11 知 X_1 含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_{ω}，因此，$S_{\omega}\times\prod_{i\geq 2} X_i$ 是 k 空间. 由引理 5.3.5 和推论 2.1.13 知$\prod_{i\geq 2} X_i$ 是局部紧空间，从而，对于 $i\geq 2$，所有的X_i是局部紧空间且至多有限个X_i 不是紧空间. 若$\prod_{i\geq 2} X_i$ 不是强 Fréchet 空间，那么 X_1 是局部紧空间.

(19.3) 如果 X_1 和$\prod_{i\geq 2} X_i$ 都不是强 Fréchet 空间，则 $S_{\omega}\times X_1$ 和 $S_{\omega}\times\prod_{i\geq 2} X_i$ 都是 k 空间. 由定理 5.3.8 知 X_1 和$\prod_{i\geq 2} X_i$ 都是局部 k_{ω} 空间，于是所有的 X_i 都是局部 k_{ω} 空间且至多有限个 X_i 不是紧空间.

综上所述，或者$\{X_i\}$满足 Tanaka 条件，或者 X_1 是局部紧空间且$\prod_{i\geq 2} X_i$ 是 k 空间. 利用归纳法，可以验证，或者$\{X_i\}$满足 Tanaka 条件，或者所有的 X_i 是局部紧空间，而具有点可数 k 网的局部紧空间是第一可数空间，于是总有$\{X_i\}$满足 Tanaka 条件. ▮

例 5.3.20(林寿，刘川[1996]) (BF(ω_2))存在具有点可数闭 k 网的正则空间 Y 使得 $Y\times S_{\omega}$ 是 k 空间，但是 Y 不是局部σ 紧空间.

让 B 是 I 的基数为 ω_1 的子集. 对于每一 $b\in B$, 让 B_b 是以 x_b 为极限点的同胚于 S_1 的收敛序列. 让 Y 是空间($\oplus\{B_b : b\in B\})\oplus I$ 中将每一 x_b 与 $b\in B$ 贴成一点而成的商空间. Y/I 同胚于 S_{ω_1}. 由引理 5.3.12, $S_\omega\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间, 而商映射 $p:Y\to Y/I$ 是完备映射, 所以 $Y\times S_\omega$ 是 k 空间. 显然, Y 不是局部 σ 紧空间. ▌

例 5.3.21(Shibakov[1995a]) (CH)存在具有点可数闭 k 网的 σ 紧的正则空间 Γ_B 使得 $\Gamma_B\times S_\omega$ 是 k 空间, 但是 Γ_B 不是局部 k_ω 空间.

让 $\Gamma=\bigcup_{i\in N} I_i$, 其中 I_i=I. 让 $\pi:\Gamma\to I_0$ 是投影映射, $B\subset I_0$=I. Γ_B 表示集 Γ 赋予极大拓扑使得每一子空间 $I_i\subset\Gamma_B$ 有通常的欧氏拓扑且对于每一 $b\in B$, $\pi^{-1}(b)$是可数紧的具有唯一的非孤立点 $b\in I_0$. ▌

5.4 某些尚未解决的问题

为方便读者, 我们将以上各章节提到的一些问题或猜测重新集中成一节, 供有兴趣的读者研究. 为方便查对, 问题或猜测仍使用原来的序号.

问题 2.1.8(林寿, 燕鹏飞[1998]) 设 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 的正则空间, 若 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 那么 X 是否具有点可数的 cs*网?

问题 2.1.17 (1)(刘川, Tanaka[1996b]) 设 X 是具有点可数 cs*网的序列空间, 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_2, 那么 X 是否具有点可数的 cs 网?

(2) 用度量空间的适当的映象刻画具有点可数 wcs*网的空间.

猜测 2.2.7 设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖的闭映射. 若空间 X 具有点可数 k 网, 那么空间 Y 具有点可数 k 网当且仅当 Y 的每一紧子集是可度量的.

问题 2.2.12(Sakai[1997b]) 是否任一空间可表为具有点可数 k 网空间的闭映象?

问题 2.3.18 设空间 X 具有点可数弱基, 是否存在度量空间 M 和商 s 映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le 1$?

问题 2.4.16(Tanaka[1993]) 开映射是否保持 gf 可数空间?

问题 2.5.12 (1) 具有紧可数 cs*网的序列空间是否具有点可数的 cfp 网?

(2) 是否存在具有点可数 cs*网的正则空间 X 使得 X 不具有点可数的 cfp 网?

问题 3.1.14 具有 cs*覆盖点星网的空间是否是度量空间的伪序列覆盖的π映象?

问题 3.1.15(Tanaka[1987a]) 设 X 是对称度量空间. 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_2, 那么 X 是否是半度量空间?

问题 3.2.7(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]) 寻求局部可分度量空间的商紧映象的好的内在刻画.

问题 3.2.11(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]) 具有σ点有限 cs 网的对称度量空间是否是度量空间的商紧映象?

问题 3.2.12 可分度量空间的商π映象是否是可分度量空间的商紧映象?

问题 3.3.2(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]) 借助度量空间的好的映象刻画具有点正则 cs*网的序列空间.

问题 3.3.19(Tanaka, 周浩旋[1985/86]) (局部紧)度量空间的商紧映象是否具有点 G_δ 性质?

问题 3.3.20 (1) 度量空间的伪序列覆盖的 s, π映象是否具有点正则 cs*网?

(2) 具有点正则 cs*网的空间是否是度量空间的伪序列覆盖紧映象?

问题 3.4.3 度量空间上的序列覆盖的π映射是否是 1 序列覆盖映射?

问题 3.4.5 序列覆盖的闭映射是否保持 g 可度量空间?

问题 3.4.8 设 X 是度量空间, $f:X\to Y$ 是序列商的紧映射, 那么 f 是否是伪序列覆盖映射?

问题 4.1.10 具有σ紧有限弱基的正则空间是否是亚 Lindelöf 空间?

问题 4.1.11 (1) 具有σ局部有限 k 网的正则的 k 空间是否具有σ闭包保持弱基?

(2) 具有σ闭包保持弱基的正则空间是否是亚 Lindelöf 空间?

问题 4.3.8 设 $f:Z\to X$ 是闭映射, Z 是度量空间. 刻画分别满足定理 4.3.5 的条件(a)或(b)的空间 X.

问题 5.1.1(Velichko[1988]) 寻求拓扑性质Φ使得空间 X 是具有性质Φ的度量空间的商 s 映象当且仅当 X 既是Φ空间又是度量空间的商 s 映象.

猜想 5.1.3(林寿, 刘川, 戴牧民[1997]) 空间 X 是局部可分度量空间的商 s 映象当且仅当 X 是度量空间的商 s 映象且 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的.

问题 5.1.19 局部可分度量空间的序列覆盖的紧映象是否等价于具有由$\aleph_0$子空间组成的点正则 cs 网的空间?

问题 5.1.20 设正则空间 X 是具有点可数 cs*网的 Fréchet 空间. 若 X 的每一第一可数的闭

子空间是局部可分的, 那么 X 是否是局部可分空间?

问题 5.2.10 设正则空间 X 是具有点可数 k 网的 Fréchet 空间, 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的, 那么 X 是否具有星可数 k 网?

问题 5.3.1(Michael[1973]) 设 X 和 Y 是 k 空间, 寻求 X×Y 是 k 空间的充分且必要条件.

猜测 5.3.4 设 X 和 Y 是具有点可数 k 网的 k 空间, 则 X×Y 是 k 空间当且仅当空间对(X, Y)满足 Tanaka 条件.

问题 5.3.16(刘川, Tanaka[1998b]) 具有点可数 k 网的正则的 Fréchet 空间是否具有紧可数 k 网?