第四章　关于遗传闭包保持覆盖

1924 年 Alexandroff 引进了局部有限集族的概念(Engelking[1977]). 仿紧性的定义及 Nagata-Smirnov 度量化定理的建立表明了局部有限集族是一般拓扑学中的重要概念. 1966 年 Lašnev[1966]引进了遗传闭包保持集族的概念. 1975 年 Burke, Engelking 和 Lutzer[1975]证明了具有σ遗传闭包保持基的正则空间等价于可度量空间(林寿[1995], 定理 2.5.17), 1985 年 Foged[1985]证明了度量空间的闭映象等价于具有σ遗传闭包保持闭 k 网的 Fréchet 空间(林寿[1995], 定理 2.5.7). 这两条定理开辟了遗传闭包保持覆盖的两个研究课题, 一是怎样的遗传闭包保持集族可转化为局部有限集族? 林寿[1995]列举了这方面的不少结果; 二是遗传闭包保持集族与闭映射的相互关系, 本章将介绍这方面的一些结果.

度量空间的闭映象称为 Lašnev 空间. Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]曾问: Lašnev 空间是否具有点可数 k 网? Foged 关于 Lašnev 空间的遗传闭包保持刻画肯定地回答了上述问题, 同时引导人们通过由遗传闭包保持覆盖所决定的空间建立度量空间的闭映象与点可数覆盖空间的联系. 本章围绕 Siwiec[1974]关于 g 可度量空间的覆盖性质问题(问题 4.1.1), Miwa(Tanaka, 周浩旋[1985/86])关于确定的 Lašnev 空间的特征问题(问题 4.3.1)等介绍广义度量空间的覆盖性质与确定的 Lašnev 空间的刻画.

4.1　k 网与覆盖性质

度量空间具有很好的覆盖性质和正规性质. 广义度量空间也有一些相应的覆盖性质与正规性, 如正则的σ空间是次仿紧空间. Siwiec[1974]提出下述问题.

问题 4.1.1　(1) g 可度量空间是正规空间吗?

(2) 可分的 g 可度量空间具有可数弱基吗?

(3) 正规的 g 可度量空间是仿紧空间吗?

Jakovlev[1976]肯定地回答了上述问题(2)和(3). Foged[1986]系统地研究了由 k 网确定的广义度量空间类的覆盖性质与正规性, 在更一般的$\aleph$空间类回答了上述问题, 如他证明了

(1.1) 存在非正规的 g 可度量空间.

(1.2) 在假设(MA+$\neg$ CH)之下存在非单调正规的具有可数弱基的正则空间.

(1.3) 具有σ局部有限 k 网的正则的 k 空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

(1.4) 具有σ局部有限 k 网的正规的 k 空间是仿紧空间.

与上述(1.3)和(1.4)相应的结果在具有σ遗传闭包保持 k 网的空间上是否成立? 彭良雪[2000]和刘川[1995]分别获得了肯定的回答.

引理 4.1.2 在正则空间中遗传闭包保持集族的闭包仍是遗传闭包保持集族.

证明. 设$\mathcal{P}$是正则空间 X 的遗传闭包保持集族. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 若$\mathcal{P}$的闭包 cl($\mathcal{P}$)不是 X 的遗传闭包保持集族, 那么对于每一$\alpha\in\Lambda$, 存在$H_\alpha\subset \mathrm{cl}(P_\alpha)$使得$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{cl}(H_\alpha)$不是 X 的闭子集. 取$x\in \mathrm{cl}(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha)\setminus\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{cl}(H_\alpha)$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 存在 X 的分别含有 x 和$\mathrm{cl}(H_\alpha)$的互不相交的开子集$V_\alpha$和$U_\alpha$, 于是$H_\alpha\subset U_\alpha\cap \mathrm{cl}(P_\alpha)\subset \mathrm{cl}(U_\alpha\cap P_\alpha)$, 所以$x\in \mathrm{cl}(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{cl}(U_\alpha\cap P_\alpha))=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{cl}(U_\alpha\cap P_\alpha)$, 从而有$\beta\in\Lambda$使得$x\in \mathrm{cl}(U_\beta\cap P_\beta)$, 因此$U_\beta\cap P_\beta\cap V_\beta\neq\varnothing$, 矛盾. 故$\mathcal{P}$的闭包仍是 X 的遗传闭包保持集族. ∎

引理 4.1.3 具有σ弱遗传闭包保持 k 网的空间具有σ紧有限 k 网.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的σ弱遗传闭包保持 k 网. 记$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$, 其中每一$\mathcal{P}_n$是 X 的弱遗传闭包保持集族且$\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 对于每一 n∈N, 置$D_n=\{x\in X : (\mathcal{P}_n)_x$不是有限的$\}$, $\mathcal{F}_n=\{P\setminus D_n : P\in\mathcal{P}_n\}\cup\{\{x\} : x\in D_n\}$.

(3.1) $\mathcal{F}_n$是 X 的紧有限的子集族.

设 K 是 X 的任一非空紧子集. 首先, $K\cap D_n$是有限集. 否则, 存在 K 的无限子集$\langle x_i\rangle$和$\mathcal{P}_n$的无限子集$\langle P_i\rangle$使得每一$x_i\in P_i$, 从而$\langle x_i\rangle$是 K 的闭离散子集, 矛盾. 若存在$\mathcal{P}_n$的无限子集$\langle F_i\rangle$使得每一$(F_i\setminus D_n)\cap K\neq\varnothing$, 那么存在 K 的无限子集$\langle y_k\rangle$和子集列$\{F_{i_k}\}$使得每一$y_k\in F_{i_k}$, 于是$\langle y_k\rangle$是 K 的闭离散子集, 矛盾. 故$(\mathcal{F}_n)_K$是有限的.

(3.2) $\bigcup_{n\in N}\mathcal{F}_n$是 X 的 k 网.

对于每一$K\subset U$, 其中 K 和 U 分别是 X 的紧子集和开子集, 存在 n∈N 和$\mathcal{P}'\in\mathcal{P}_n^{<\omega}$使得$K\subset\cup\mathcal{P}'\subset U$. 令$\mathcal{F}=\{P\setminus D_n : P\in\mathcal{P}'\}\cup\{\{x\} : x\in K\cap D_n\}$. 那么$\mathcal{F}\in\mathcal{F}_n^{<\omega}$且$K\subset\cup\mathcal{F}\subset U$. 故$\bigcup_{n\in N}\mathcal{F}_n$是 X 的 k 网. ∎

定理 4.1.4(彭良雪[2000]) 具有σ遗传闭包保持 k 网的正则的 k 空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

证明. 设X是具有σ遗传闭包保持k网的正则的k空间. 为证明X是遗传亚Lindelöf空间, 只须证明X的任一开子空间是亚Lindelöf空间. 由于具有σ遗传闭包保持k网的正则的k空间性质是开遗传性质, 所以又只须证明X是亚Lindelöf空间. 由引理4.1.2, X具有σ遗传闭包保持的闭k网. 设$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$是X的k网, 其中每一$\mathcal{P}_n$是X的遗传闭包保持的闭集族且$\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$.

(4.1) X的每一离散的闭子集族有点可数的开扩张.

设$\mathcal{F}$是X的离散闭子集族. 记$\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, $\mathcal{P}(\varnothing)=\mathcal{F}$. 对于每一$n\in N$, $\alpha\in\Lambda$, 让

$P^*_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap F_\alpha\neq\varnothing, P\cap F_\beta=\varnothing,\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$,

$P_\alpha(n)=P^*_\alpha(n)\setminus\cup\{P^*_\beta(n):\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$.

那么对于任一$\Lambda'\subset\Lambda$, $\bigcup_{\beta\in\Lambda'}P^*_\beta(n)$是X的闭子集. 令$\mathcal{P}(n)=\{P_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$. 对于N的有限序列$\delta$, 如果$\mathcal{P}(\delta)$已被定义. 设$\mathcal{P}(\delta)=\{P_\alpha(\delta):\ \alpha\in\Lambda\}$, 其中$P_\alpha(\delta)=P^*_\alpha(\delta)\setminus\cup\{P^*_\beta(\delta):\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$, 且对于任一$\Lambda'\subset\Lambda$, $\bigcup_{\gamma\in\Lambda'}P^*_\gamma(\delta)$是X的闭子集. 对于每一$n\in N$, 按下述方式构造$\mathcal{P}(\delta n)$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 让

$P^*_\alpha(\delta n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap P_\alpha(\delta)\neq\varnothing, P\cap P^*_\beta(\delta)=\varnothing,\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$,

$P_\alpha(\delta n)=P^*_\alpha(\delta n)\setminus\cup\{P^*_\beta(\delta n):\ \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$,

$\mathcal{P}(\delta n)=\{P_\alpha(\delta n):\ \alpha\in\Lambda\}$.

那么对于任一$\Lambda'\subset\Lambda$, $\bigcup_{\gamma\in\Lambda'}P^*_\gamma(\delta n)$是X的闭子集. 让$U_\alpha=\cup\{P_\alpha(\delta):\ \delta$是N的有限序列$\}$, $\mathcal{U}=\{U_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 我们将证明$\mathcal{U}$是$\mathcal{F}$的点可数的开扩张.

对于每一$x\in F_\alpha$, 存在x的开邻域V_x使得对于每一$\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}$有$V_x\cap F_\beta=\varnothing$, 那么存在$n\in N$和$P\in\mathcal{P}_n$使得$x\in P\subset V_x$, 于是$P\subset P^*_\alpha(n)$, 而$x\notin P^*_\beta(n)$, 所以$x\in P_\alpha(n)$, 故$F_\alpha\subset U_\alpha$.

由引理4.1.3和推论2.1.4, X是序列空间, 为证明U_α是X的开子集只须证明U_α在X中是序列开的. 设$x\in U_\alpha$且Z是X中收敛于x的序列, 则存在N的有限序列δ使得$x\in P_\alpha(\delta)$. 令$M=\cup\{P^*_\beta(\delta) : \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$, 则M是X的闭子集且$x\notin M$, 于是存在x的开邻域$G_x$使得$G_x\cap M=\varnothing$, 所以存在$n\in N$和$P_x\in\mathcal{P}_n$使得$x\in P_x\subset G_x$且$P_x$含有序列Z的无限项, 从而

$P_x \subset P^*_\alpha(\delta n)$. 对于每一 $\beta \in \Lambda \setminus \{\alpha\}$，由于 $x \in P^*_\alpha(\delta)$，所以 $x \in X \setminus \cup\{P^*_\beta(\delta n) : \beta \in \Lambda \setminus \{\alpha\}\}$，于是 Z 的子序列是终于 $P_\alpha(\delta n)$的，从而 U_α 是 x 的序列邻域，故 U_α 是 X 的开子集.

若$\mathscr{U}$不是点可数的，则存在$x \in X$ 使得$|\{\alpha \in \Lambda : x \in U_\alpha\}| > \omega$，于是存在 N 的一个有限序列$\delta$和$\Lambda$的不可数子集$\Lambda'$使得当$\alpha \in \Lambda'$时有 $x \in P_\alpha(\delta)$，这与$\{P_\alpha(\delta) : \alpha \in \Lambda\}$是两两互不相交的子集族相矛盾.

(4.2) X 是亚 Lindelöf 空间.

设 $\mathscr{W}$ 是空间 X 的开覆盖，由定理 1.3.5，X 是σ空间，于是 $\mathscr{W}$ 有加细$\bigcup_{i \in N} \mathscr{F}_i$，其中每一$\mathscr{F}_i = \{F_{i\alpha} : \alpha \in \Lambda_i\}$是 X 的离散的闭子集族. 对于每一 $i \in N$，由(4.1)，存在 X 的点可数的开子集族$\mathscr{U}_i = \{U_{i\alpha} : \alpha \in \Lambda_i\}$使得每一 $F_{i\alpha} \subset U_{i\alpha}$. 对于每一$i \in N$和$\alpha \in \Lambda_i$，选取$W_{i\alpha} \in \mathscr{W}$使得$F_{i\alpha} \subset W_{i\alpha}$，那么$\bigcup_{i \in N}\{W_{i\alpha} \cap U_{i\alpha} : \alpha \in \Lambda_i\}$是 $\mathscr{W}$ 的点可数的开加细，所以 X 是亚 Lindelöf 空间. ∎

若空间 X 的每一闭离散子空间至多是可数子集，则称 X 是$\aleph_1$紧空间. Lindelöf 空间和遗传可分空间都是$\aleph_1$紧空间.

推论 4.1.5 设 X 是具有σ遗传闭包保持 k 网的空间. 若 X 满足下述条件之一，则 X 具有可数 k 网.

(1) $\aleph_1$紧空间.

(2) 可分，正则的 k 空间.

证明. 由于可分的亚 Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间，由定理 4.1.4，只须证明具有σ遗传闭包保持 k 网的$\aleph_1$紧空间具有可数 k 网. 设$\mathscr{P} = \bigcup_{n \in N} \mathscr{P}_n$是空间 X 的 k 网，其中每一 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的遗传闭包保持的子集族且$\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$. 对于每一$n \in N$，置 $E_n = \{x \in X : |(\mathscr{P}_n)_x| > \omega\}$，则

(5.1) $\{P \setminus E_n : P \in \mathscr{P}_n\}$是可数的子集族.

若不然，则存在 $\mathscr{P}_n$ 的不可数子集$\{P_\alpha : \alpha < \omega_1\}$和 X 的子集$\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$使得每一$x_\alpha \in P_\alpha \setminus E_n$. 由$\mathscr{P}_n$是遗传闭包保持的及 X 是$\aleph_1$紧空间知$\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$是可数集，于是不妨

设存在 $x\in X\setminus E_n$ 使得每一 $x_\alpha=x$, 这与 E_n 的定义相矛盾.

(5.2) E_n 是 X 的可数的闭离散子空间.

对于每一 $Z\subset E_n$ 及$|Z|\le\omega_1$, 记 $Z=\{x_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 由 E_n 的定义及良序定理, 应用超限归纳法, 我们可选取$\mathcal{P}_n$的由两两互不相同元组成的子集$\{P_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$使得每一$x_\alpha\in P_\alpha$, 于是 Z 是 X 的可数闭离散子空间, 从而 E_n 是 X 的可数闭离散子空间.

对于每一 $n\in N$, 让 $\mathcal{P}_n'=\{P\setminus E_n : P\in\mathcal{P}_n\}\cup\{\{x\}: x\in E_n\}$, 则 $\mathcal{P}_n'$是可数的.

(5.3) $\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n'$是 X 的可数 k 网.

设 $K\subset U$, 其中 K 和 U 分别是 X 的紧子集和开子集, 则存在 $n\in N$ 和 $\mathcal{P}_n^*\in\mathcal{P}_n^{<\omega}$ 使得 $K\subset\cup\mathcal{P}_n^*\subset U$. 由于 $K\cap E_n$ 是有限的, 所以 $\mathcal{P}_n'^*=\{P\setminus E_n : P\in\mathcal{P}_n^*\}\cup\{\{x\} : x\in K\cap E_n\}\in\mathcal{P}_n'^{<\omega}$ 且 $K\subset\cup\mathcal{P}_n'^*\subset U$, 故$\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n'$是 X 的可数 k 网. ▌

推论 4.1.6 设 X 是 k 空间. 若 X 满足下述条件之一, 则 X 具有星可数 k 网.

(1) 具有由 $\aleph_1$ 紧子集组成的σ紧有限 k 网.

(2) 具有σ遗传闭包保持可分 k 网的正则空间.

证明. (1) 设空间 X 具有由$\aleph_1$紧子集组成的σ紧有限 k 网, 为证明 X 具有星可数 k 网, 只须证明若$\mathcal{P}$是 X 的紧有限集族, A 是 X 的$\aleph_1$紧子集, 则$(\mathcal{P})_A$是可数的. 若不然, 则存在 A 的不可数子集$\{x_\alpha : \alpha<\omega_1\}$和$\mathcal{P}$的不可数子集$\{P_\alpha : \alpha<\omega_1\}$使得每一 $x_\alpha\in P_\alpha$. 由于 A 是$\aleph_1$紧的, 集$\{x_\alpha : \alpha<\omega_1\}$有聚点, 又由于 X 是 k 空间, 存在 X 的紧子集 K 使得 K 含有无限多个 x_α, 这与$\mathcal{P}$的紧有限性相矛盾.

(2) 设 X 是具有σ遗传闭包保持可分 k 网的正则空间. 由推论 4.1.5, X 的可分子集是 X 的遗传可分子集, 再由引理 4.1.3 和(1), X 具有星可数 k 网. ▌

对于空间 X 和 $F\subset W\subset X$, W 称为 F的弱邻域(序列邻域), 若 W 是 F 中每一点的弱邻域(序列邻域).

定理 4.1.7(刘川[1995]) 具有σ遗传闭包保持 k 网的正规的 k 空间是仿紧空间.

证明. 设 X 是具有σ遗传闭包保持 k 网的正规的 k 空间, $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$是 X 的 k 网, 其中每一

$\mathcal{P}_n$ 是 X 的遗传闭包保持的闭集族且 $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$. 由引理 4.1.3 和推论 2.1.4, X 是序列空间.

(7.1) X 的每一离散的闭子集族 $\mathcal{F}$ 有离散的序列邻域闭扩张.

设 $\mathcal{F}$ 是 X 的离散的闭子集族. 记 $\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 对于每一 $n\in N$, $\alpha\in\Lambda$, 让

$\mathcal{F}_\alpha(n)=\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap F_\alpha\neq\varnothing, P\cap F_\beta=\varnothing, \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$,

$P_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap F_\alpha=\varnothing\}$,

则 $P_\alpha(n)$ 是 X 的闭子集且 $P_\alpha(n)\cap F_\alpha=\varnothing$, 于是存在 X 的开子集 $V_\alpha(n)$ 使得 $F_\alpha\subset V_\alpha(n)\subset cl(V_\alpha(n))\subset X\setminus P_\alpha(n)$, 令 $F_\alpha(n)=(\cup\mathcal{F}_\alpha(n))\cap cl(V_\alpha(n))$. 对于 $\alpha\neq\beta$, 若 $x\in\cup\mathcal{F}_\beta(n)$, 则存在 $P\in\mathcal{P}_n$ 使得 $P\cap F_\beta\neq\varnothing$, $P\cap F_\alpha=\varnothing$ 且 $x\in P$, 于是 $P\subset P_\alpha(n)$, 从而 $P\cap cl(V_\alpha(n))=\varnothing$, 因此 $x\notin cl(V_\alpha(n))$, 故 $(\cup\mathcal{F}_\beta(n))\cap cl(V_\alpha(n))=\varnothing$. 所以 $\{F_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的互不相交的闭子集族. 由于 $\mathcal{P}_n$ 是遗传闭包保持的, $F_\alpha(n)\subset\cup\mathcal{F}_\alpha(n)$, 且当 $\alpha\neq\beta$ 时有 $\mathcal{F}_\alpha(n)\cap\mathcal{F}_\beta(n)=\varnothing$, 于是 $\{F_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的离散闭子集族.

对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 让 $W_\alpha=\bigcup_{n\in N}F_\alpha(n)$. 显然 $F_\alpha\subset W_\alpha$. 若 S 是 X 中的序列且收敛于 $s\in F_\alpha$, 则存在 $n\in N$ 和 $(\mathcal{P}_n)_s$ 的有限子集 $\mathcal{P}'$ 使得 S 是终于 $\cup\mathcal{P}'$ 的且当 $\beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}$ 时有 $(\cup\mathcal{P}')\cap F_\beta=\varnothing$, 于是 $\mathcal{P}'\subset\mathcal{F}_\alpha(n)$, 而 $V_\alpha(n)$ 是 X 的开子集, 从而 S 是终于 $F_\alpha(n)$ 的, 故 W_α 是 F_α 的序列邻域.

令 $\mathcal{W}=\{W_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 对于每一 $n\leq m$ 和 $\alpha\neq\beta$, 由于 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_m$, 所以 $\mathcal{F}_\alpha(n)\subset\mathcal{F}_\alpha(m)$, 于是 $F_\alpha(n)\cap F_\beta(m)\subset(\cup\mathcal{F}_\alpha(m))\cap cl(V_\beta(m))=\varnothing$, 从而 $\mathcal{W}$ 是 X 的两两互不相交的子集族. 对于每一 $\Lambda'\subset\Lambda$, 令 $W=\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$. 若 Z 是由 W 中点组成的 X 中的收敛序列, 设 Z 收敛于 z, 让 $F=\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}F_\alpha$. 如果 $z\in F$, 则 $z\in W$. 如果 $z\notin F$, 则存在 z 的开邻域 V_z 使得 $V_z\cap F=\varnothing$, 从而存在 $n\in N$ 和 $\mathcal{P}^*\in\mathcal{P}_n^{<\omega}$ 使得 $\cup\mathcal{P}^*\subset V_z$, 且 Z 是终于 $\cup\mathcal{P}^*$ 的, 于是当 $\alpha\in\Lambda'$, $n\leq m$ 时有 $(\cup\mathcal{P}^*)\cap F_\alpha(m)\subset P_\alpha(m)\cap cl(V_\alpha(m))=\varnothing$, 因此 $\cup\{F_\alpha(m) : \alpha\in\Lambda', m\geq n\}$ 中仅含有序列 Z 中的有限项. 令 $G=\cup\{F_\alpha(m) : \alpha\in\Lambda', m<n\}$, 则 G 是 X 的闭子集且 G 含有 Z 中的无限项, 故

$z\in G\subset W$. 这表明了 W 是 X 的序列闭集, 所以 W 是 X 的闭子集. 因而 $\mathcal{W}$ 是 X 的闭包保持的子集族, 故 $\mathcal{W}$ 是 X 的离散闭子集族.

(7.2) X 是集态正规空间.

设 $\mathcal{F}$ 是 X 的离散的闭子集族. 记 $\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 由(7.1), 存在 X 的离散的闭子集族的列 $\{\mathcal{W}(n)\}$ 使得 $\mathcal{W}(1)$ 是 $\mathcal{F}$ 的序列邻域扩张且每一 $\mathcal{W}(n+1)$ 是 $\mathcal{W}(n)$ 的序列邻域扩张. 记 $\mathcal{W}(n)=\{W_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$, 令 $W_\alpha=\bigcup_{n\in N}W_\alpha(n)$, $\mathcal{W}=\{W_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, 则 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{F}$ 的两两互不相交的开扩张. 这只须说明每一 W_α 是 X 的开子集. 设 X 中的序列 Z 收敛于点 $x\in W_\alpha$, 则存在 $n\in N$ 使得 $x\in W_\alpha(n)$, 于是 Z 是终于 $W_\alpha(n+1)$ 的, 所以 Z 是终于 W_α 的, 故 W_α 是 X 的序列开集, 从而 W_α 是 X 的开子集. 因此 X 是集态正规空间.

(7.3) X 是仿紧空间.

由于 X 是 σ 空间, 所以 X 是次仿紧空间, 故从(7.2)知 X 是仿紧空间. ▋

对于问题 4.1.1(3)的另一回答是下述由高智民证明的结果.

定理 4.1.8(高智民[1992]) 具有 σ 闭包保持弱基的正规空间是仿紧空间.

证明. 设 $\mathcal{P}$ 是正规空间 X 的 σ 闭包保持的闭弱基. 记 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$, 其中每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的弱邻域基, $\mathcal{P}_n$ 是闭包保持的闭子集族且每一 $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$.

设 $\mathcal{F}$ 是 X 的离散的闭子集族.

(8.1) $\mathcal{F}$ 有两两互不相交的弱邻域扩张.

设 $\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 对于每一 $n\in N$, $\alpha\in\Lambda$, 令 $E_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap F_\beta=\varnothing, \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$, $G_\alpha=\bigcup_{n\in N}(E_\alpha(n)\setminus\cup\{E_\beta(n) : \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\})$, 那么 $F_\alpha\subset G_\alpha$ 且当 $\alpha\neq\beta$ 时有 $G_\alpha\cap G_\beta=\varnothing$. 往证 G_α 是 F_α 的弱邻域.

令 $L_\alpha=\cup\{F_\beta : \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$, 那么 L_α 是 X 的闭子集且 $F_\alpha\cap L_\alpha=\varnothing$. 对于每一 $x\in F_\alpha$, 存在 $n\in N$ 和 $P_1\in\mathcal{P}_x\cap\mathcal{P}_n$ 使得 $P_1\cap L_\alpha=\varnothing$, 于是 $P_1\subset E_\alpha(n)$. 又因为 $x\notin\cup\{E_\beta(n) : \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\}$, 存在 $m\in N$ 和 $P_2\in\mathcal{P}_x\cap\mathcal{P}_m$ 使得 $P_2\cap(\cup\{E_\beta(n) : \beta\in\Lambda\setminus\{\alpha\}\})=\varnothing$. 于是 $P_1\cap P_2\subset G_\alpha$, 所以 G_α 是 F_α 的弱邻域.

(8.2) $\mathcal{F}$有离散的弱邻域闭扩张.

对于每一 n∈N, $\alpha\in\Lambda$, 令 $F^*_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\subset G_\alpha$ 且存在 $x\in F_\alpha$ 使得 $P\in\mathcal{P}_x\}$, 那么 $F^*_\alpha(n)\subset G_\alpha$ 且$\{F^*_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$是 X 的闭包保持的闭子集族, 于是$\{F^*_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$是离散的. 令 $P_\alpha(n)=\cup\{P\in\mathcal{P}_n : P\cap F_\alpha=\varnothing\}$, 则 $P_\alpha(n)$是 X 的闭子集且 $P_\alpha(n)\cap F_\alpha=\varnothing$, 于是存在 X 的开子集 $V_\alpha(n)$使得 $F_\alpha\subset V_\alpha(n)\subset cl(V_\alpha(n))\subset X\setminus P_\alpha(n)$. 令 $F_\alpha(n)=F^*_\alpha(n)\cap cl(V_\alpha(n))$, 那么 $\{F_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$是 X 的离散闭子集族. 令 $W_\alpha=\bigcup_{n\in N}F_\alpha(n)$, 则 W_α是 F_α的弱邻域. 事实上, 对于每一 $x\in F_\alpha$, 由(8.1), 存在 $i\in N$ 和 $P_3\in\mathcal{P}_x\cap\mathcal{P}_i$ 使得 $P_3\subset F^*_\alpha(i)$, 同时存在 $j\in N$ 和 $P_4\in\mathcal{P}_x\cap\mathcal{P}_j$ 使得 $P_4\subset V_\alpha(i)$, 于是 $P_3\cap P_4\subset F_\alpha(i)\subset W_\alpha$.

令 $\mathcal{W}=\{W_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 由于每一 $W_\alpha\subset G_\alpha$, 所以 $\mathcal{W}$ 是 X 的两两互不相交的子集族. 为证 $\mathcal{W}$ 是离散的, 只须证明 $\mathcal{W}$ 是 X 的闭包保持的闭子集族.

对于每一$\Lambda'\subset\Lambda$, 设 $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$. 由于 $x\notin\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}F_\alpha$, 于是存在 k∈N 和 $P'\in\mathcal{P}_x\cap\mathcal{P}_k$ 使得 $P'\cap(\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}F_\alpha)=\varnothing$, 从而当$\alpha\in\Lambda'$, n≥k 时有 $P'\subset P_\alpha(n)$, 那么 $P'\cap cl(V_\alpha(n))=\varnothing$, 所以 $P'\cap(\cup\{F_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda', n\geq k\})=\varnothing$. 另一方面, 由于 $x\notin\cup\{F_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda', n<k\}$, 于是存在 $P''\in\mathcal{P}_x$ 使得 $P''\cap(\cup\{F_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda', n<k\})=\varnothing$. 因此$(P'\cap P'')\cap(\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha)=\varnothing$, 故 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}W_\alpha$ 是 X 的闭子集.

(8.3) X 是集态正规空间.

对于 X 的离散的闭子集族 $\mathcal{H}_1$, 由(8.2), 存在 X 的离散的闭子集族的列$\{\mathcal{H}_n\}$使得每一 $\mathcal{H}_{n+1}$ 是 $\mathcal{H}_n$ 的弱邻域闭扩张. 对于每一 n∈N, 记 $\mathcal{H}_n=\{H_\alpha(n) : \alpha\in\Lambda\}$. 令 $\mathcal{H}=\{H_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, 其中每一 $H_\alpha=\bigcup_{n\in N}H_\alpha(n)$. 对于每一 $x\in H_\alpha$, 存在 $j\in N$ 使得 $x\in H_\alpha(j)$, 于是存在 $P\in\mathcal{P}_x$ 使得 $P\subset H_\alpha(j+1)\subset H_\alpha$, 从而 H_α 是 X 的开子集. 因此, $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{H}_1$ 的两两互不相交的开扩张, 故 X 是集态正规空间.

由于 X 是σ空间, 所以 X 是次仿紧空间, 故从(8.3)知 X 是仿紧空间. ∎

例 4.1.9 具有σ闭包保持基的空间$\not\Rightarrow$k 空间.

如例 1.5.7 的 Michael 空间 $X=N\cup\{p\}$. 由于 N 是 X 的孤立点集, p 在 X 中的开邻域基是 X 的闭包保持集族, 所以 X 具有σ闭包保持基, 但是 X 不是 k 空间. ∎

由例 1.5.4 知, 具有紧可数闭 k 网的可分, 正则的 k 空间未必是亚 Lindelöf 空间. 刘川和 Tanaka[1996a, 1998a, 1998b]曾提出问题: 具有σ紧有限 k 网的正则的 k 空间是否是亚 Lindelöf 空间? 进一步, 我们提出

问题 4.1.10 具有σ紧有限弱基的正则空间是否是亚 Lindelöf 空间?

问题 4.1.11 (1) 具有σ局部有限 k 网的正则的 k 空间是否具有σ闭包保持弱基?

(2) 具有σ闭包保持弱基的正则空间是否是亚 Lindelöf 空间?

4.2 局部可分度量空间的闭映象

Foged[1985]通过遗传闭包保持覆盖建立了度量空间闭映象的特征. 本节也将通过遗传闭包保持覆盖寻求局部可分度量空间的类似特征, 这种特征表现了度量空间的闭映象与局部可分度量空间的闭映象之间的区别. 关于局部可分度量空间闭 s 映象和闭映象的进一步知识我们将在§5.1 和§5.2 中介绍.

Foged 定理是优美的. 在本书的应用中我们只须 Foged 定理的下述特例, 其证明取自 Mizokami, 林寿[1997].

引理 4.2.1 设 X 是可分的正则空间. 若 X 是具有σ遗传闭包保持 k 网的 Fréchet 空间, 则 X 是可分度量空间的闭映象.

证明. 由推论 4.1.5, X 具有可数 k 网. 设$\mathcal{P}=\langle P_i\rangle$是 X 的可数 k 网, 不妨设$\mathcal{P}$关于有限并封闭且每一$P_i$是 X 的闭子集.

(1.1) 若 $x\in U\in\tau$ 且 Z 是 X 中收敛于 x 的序列, 则存在 $i\in N$ 使得 $P_i\subset U$ 且 Z 是终于 $\mathrm{int}(P_i)\cup\{x\}$的.

若不然, 记$\{P_i: x\in P_i\subset U\}=\{H_k: k\in N\}$, 那么存在 Z 的子序列$\{z_k\}$使得每一 $z_k\in U\setminus \mathrm{int}(\bigcup_{i\le k}H_i)$, 于是存在 $U\setminus\bigcup_{i\le k}H_i$ 中的序列$\{z_{kn}\}$收敛于 z_k, 从而 $x\in \mathrm{cl}\{z_{kn}: k, n\in N\}$, 所以存在子序列$\{z_{k_jn_j}\}$收敛于 x. 因为$\mathcal{P}$是 X 的 k 网, 存在 $m\in N$ 使得$\{z_{k_jn_j}\}$是终于 H_m 的, 这与当 $k_j\ge m$ 时有 $z_{k_jn_j}\in U\setminus H_m$ 相矛盾.

对于每一 $i\in N$, 记 $\Lambda_i=\{P_i, X\setminus P_i\}$, 赋予 Λ_i 离散拓扑. 令 $M=\{\alpha=(H_i)\in\prod_{i\in N}\Lambda_i$: $\langle cl(H_i)\rangle$是 X 中某点 x_α 的网$\}$, 则 M 是可分度量空间, 并且对于每一$\alpha\in M$, x_α 是唯一确定的, 于是可以定义函数 $f:M\to X$ 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$, 即 $f((H_i))=\bigcap_{i\in N}cl(H_i)$. 易验证 f 是连续函数.

(1.2) f 是满函数.

对于每一 $x\in X$, 若 x 是 X 的孤立点, 则存在 $i\in N$ 使得 $P_i=\{x\}$, 于是存在$(H_i)\in M$ 使得 $f((H_i))=x$. 若 x 不是 X 的孤立点, 存在 $X\setminus\{x\}$中的序列 Z 收敛于 x. 对于每一 $i\in N$, 存在 $H_i\in\Lambda_i$使得 $cl(H_i)\cap Z$ 是无限集. 设 $x\in U\in\tau$, 由(1.1), 存在 $i\in N$ 使得 $P_i\subset U$ 且 Z 是终于 $int(P_i)\cup\{x\}$的, 于是 $H_i=P_i$且 $x\in cl(H_i)\subset U$. 故$(H_i)\in M$ 且 $f((H_i))=x$.

(1.3) f 是闭映射.

设 F 是 M 的闭子集且 $x\in cl(f(F))\setminus f(F)$, 则存在 X 中的收敛于 x 的序列$\{x_n\}$和 F 中的序列$\{\alpha_n\}$使得每一 $f(\alpha_n)=x_n$. 记$\alpha_n=(H_{in})\in\prod_{i\in N}\Lambda_i$, 则每一 $H_{in}\in\Lambda_i$. 按下述方式选取点$(H_i)\in M$: 选取 $H_1\in\Lambda_1$使得 $N_1=\{n\in N : H_{1n}=H_1\}$是无限集, 于是又可选取 $H_2\in\Lambda_2$使得 $N_2=\{n\in N_1 : H_{2n}=H_2\}$是无限集. 继续这种过程, 可得到 N 的递减的无限子集列$\{N_i\}$和$(H_i)\in\prod_{i\in N}\Lambda_i$使得 $N_i=\{n\in N_{i-1} : H_{in}=H_i\}$. 这时$\{x_n : n\in N_i\}\subset cl(H_i)$, 所以 $cl(H_i)$含有序列$\{x_n\}$的无限项, 由(1.2)的论证知$(H_i)\in M$ 且 $f((H_i))=x$. 另一方面, 对于每一 $i\in N$, 选取 $k_i\in N_i$使得 $k_i<k_{i+1}$, 那么序列$\{\alpha_{k_i}\}$收敛于(H_i), 从而$(H_i)\in F$, 因此 $f((H_i))\in f(F)$, 矛盾.

综上所述, X 是可分度量空间的闭映象. ∎

引理 4.2.2 设$\mathcal{P}$是 Fréchet 空间 X 的遗传闭包保持的闭集族. 令$\mathcal{F}=\{\cap\mathcal{P}' : \mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}\}$, 则$\mathcal{F}$也是 X 的遗传闭包保持集族.

证明. 若不然, 则存在$\mathcal{F}$的子集$\{F_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$和 $H_\alpha\subset F_\alpha$使得$\{H_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$不是闭包保持的, 于是存在 $x\in cl(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha)\setminus\bigcup_{\alpha\in\Lambda}cl(H_\alpha)$. 因为 X 是 Fréchet 空间, 存在$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}H_\alpha$中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 从而存在$\alpha_n\in\Lambda$使得 $x_n\in H_{\alpha_n}$. 又因为每一F_α是$\mathcal{P}$中有限个元的交, 所以存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$和$\mathcal{P}$的无限子集$\langle P_i\rangle$使得每一 $x_{n_i}\in P_i$, 于是$\langle x_{n_i}\rangle$是离散的, 矛盾. ∎

引理 4.2.3 设 $f:X\to Y$ 是完备映射, Y 是第一可数空间. 若每一 $f^{-1}(y)$是 X 的第一可数的子集, 则 X 是第一可数空间.

证明. 对于每一 $x\in X$, 记 $y=f(x)$. 设$\langle U_i\rangle$是 y 在 Y 中的局部基, $\langle V_i\rangle$是 X 的开子集族使得$\langle V_i\cap f^{-1}(y)\rangle$是 x 在 $f^{-1}(y)$中的局部基. 对于每一 $i\in N$, 让 $F_i(x)=f^{-1}(y)\setminus V_i$, 则 $F_i(x)$是 X 的紧子集, 所以存在 X 中互不相交的开子集 W_i 和 G_i 使得 $x\in W_i$ 且 $F_i(x)\subset G_i$, 那么 $f^{-1}(y)\subset V_i\cup G_i$. 由引理 1.4.1, 存在 $j_i\in N$ 使得 $f^{-1}(U_{j_i})\subset V_i\cup G_i$, 从而$(X\setminus V_i)\cap f^{-1}(U_{j_i})\subset G_i$. 不妨设 $W_i\subset V_i$ 且 $W_{i+1}\subset W_i$. 往证$\langle W_i\cap f^{-1}(U_i)\rangle$是 x 在 X 中的局部基. 设$x_i\in W_i\cap f^{-1}(U_i)$. 若$x_0$是序列$\{x_i\}$的一个聚点, 由于$f(x_i)\in U_i$, 于是在Y中序列$\{f(x_i)\}$收敛于 y, 所以 $x_0\in f^{-1}(y)$. 如果 $x_0\neq x$, 则存在 $n\in N$ 使得 $x_0\in X\setminus V_n$, 于是 $x_0\in G_n$, 从而有无限个i使得$x_i\in W_n\cap G_n=\varnothing$, 矛盾. 因而, $x_0=x$, 即$\{x_i\}$仅能以x为唯一的聚点. 若序列$\{x_i\}$不收敛于 x, 那么存在子序列$\{x_{i_n}\}$在 X 中离散, 由于 f 是完备映射, 不妨设每一 $x_{i_n}\notin f^{-1}(y)$, 于是$\langle f(x_{i_n})\rangle$在 Y 中离散, 与序列$\{f(x_{i_n})\}$收敛于 y 相矛盾. 故 X 是第一可数空间. ∎

引理 4.2.4 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数覆盖. 让

$\mathcal{H}=\{P\in\mathcal{P}: cl(P)$是 X 的$\aleph_1$紧子集$\}$, $\mathcal{F}=\{P\in\mathcal{P}: cl(P)$是 X 的紧子集$\}$.

那么

(1) 若 X 的每一第一可数的闭子空间是局部$\aleph_1$紧的且 $\mathcal{P}$是 X 的 k 网, 则 $\mathcal{H}$ 是 X 的 k 网.

(2) 若 k空间(序列空间)X 的每一第一可数的闭子空间是局部紧的且$\mathcal{P}$是X的k网(cs*网), 则$\mathcal{F}$是 X 的 k 网(cs*网).

证明. (1) 设空间 X 的每一第一可数的闭子空间是局部$\aleph_1$紧的且 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网. 对于 X 的紧子集 K, 由 Miščenko 的引理 1.3.6, 由 $\mathcal{P}$ 的元组成 K 的有限极小覆盖的族至多是可数的, 设其为$\{\mathcal{P}_i\}$. 对于每一$n\in N$, 置$\mathcal{A}_n=\bigwedge_{i\le n}\mathcal{P}_i$, $A_n=\cup\mathcal{A}_n$, 则$\{A_n\}$是 K 在 X 中递减的网. 如果对于每一 $n\in N$, $cl(A_n)$不是 X 的$\aleph_1$紧子集, 那么 $cl(A_n)$含有不可数的离散子集 D_n. 定义 $A=K\cup(\bigcup_{n\in N}D_n)$. $f:A\to A/K$ 是自然商映射, 那么 f 是完备映射, 由推论 2.1.4 和引理 4.2.3, 则

A是X的非局部$\aleph_1$紧的第一可数的闭子集，矛盾. 因此，某一cl(A_m)是X的$\aleph_1$紧子集. 设$K\subset U$，其中U是X的开子集，则存在$n\geq m$使得$K\subset A_n\subset U$，即$\mathcal{A}_n\in\mathcal{H}^{<\omega}$且$K\subset\cup\mathcal{A}_n\subset U$，于是$\mathcal{H}$是X的k网.

(2) 设空间X的每一第一可数的闭子空间是局部紧的. 首先，设$\mathcal{P}$是k空间X的k网. 对于X的紧子集K，由Miščenko的引理1.3.6，由$\mathcal{P}$的元组成K的有限极小覆盖的族至多是可数的，设其为$\{\mathcal{P}_i\}$. 对于每一$n\in N$，置$\mathcal{A}_n=\Lambda_{i\leq n}\mathcal{P}_i$, $A_n=\cup\mathcal{A}_n$，则$\{A_n\}$是K在X中递减的网. 如果对于每一$n\in N$，cl(A_n)不是X的紧子集，由推论2.1.13，那么cl(A_n)不是X的可数紧子集，于是cl(A_n)含有可数的离散子集D_n. 定义$A=K\cup(\bigcup_{n\in N}D_n)$. 由推论2.1.4和引理4.2.3，则A是X的非局部紧的第一可数的闭子集，矛盾. 因此，某一cl(A_m)是X的紧子集. 设$K\subset U$，其中U是X的开子集，则存在$n\geq m$使得$K\subset A_n\subset U$，即$\mathcal{A}_n\in\mathcal{F}^{<\omega}$且$K\subset\cup\mathcal{A}_n\subset U$，于是$\mathcal{F}$是X的k网.

其次，设$\mathcal{P}$是序列空间X的cs*网. 设序列$\{x_n\}$在X中收敛于x，定义$K=[x_n]$. 让U是K在X中的邻域，则存在$\mathcal{P}$的有限子集列$\{\mathcal{P}_i\}$满足引理1.3.7的条件(1)~(4). 对于每一$n\in N$，置$A_n=\cup\mathcal{P}_n$，则$\{A_n\}$是K在X中递减的网. 如果对于每一$n\in N$, cl(A_n)不是X的紧子集，由推论2.1.13，那么cl(A_n)不是X的可数紧子集，于是cl(A_n)含有可数的离散子集D_n. 定义$A=K\cup(\cup_{n\in N}D_n)$. 由引理4.2.3，A是X的非局部紧的第一可数的闭子集，矛盾. 因此，某一cl(A_m)是X的紧子集. 取$P\in\mathcal{P}_m$使得$x\in P$且P含有$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$，这时cl(P)是X的紧子集且$[x_{n_i}]\subset P\subset U$，故$\mathcal{F}$是X的cs*网. ∎

引理4.2.5　设空间X由族$\mathcal{P}$控制，记$\mathcal{P}=\{P_\alpha:\alpha<\lambda\}$，令

$F_0=P_0$, $F_\alpha=P_\alpha\setminus\bigcup_{\gamma<\alpha}P_\gamma$, $0<\alpha<\lambda$.

那么

(1) $\{F_\alpha:\alpha<\lambda\}$是X的紧有限覆盖.

(2) 若X是k空间，则$\{F_\alpha:\alpha<\lambda\}$是X的弱遗传闭包保持覆盖.

(3) 若 X 是 Fréchet 空间, 则$\{cl(F_\alpha): \alpha<\lambda\}$是 X 的遗传闭包保持覆盖.

证明. (1) 显然, $\{F_\alpha : \alpha<\lambda\}$是 X 的覆盖. 对于 X 的任一非空紧子集 K, 若存在$\alpha_n<\alpha_{n+1}<\lambda$使得每一 $K\cap F_{\alpha_n}\neq\varnothing$. 取 $x_n\in K\cap F_{\alpha_n}$, 令 $F=\langle x_n\rangle$, 则 $F\subset\bigcup_{n\in N}P_{\alpha_n}$ 且每一$F\cap P_{\alpha_n}\subset\{x_i : i\le n\}$, 于是 F 是 X 的无限离散子集, 这与 K 的紧性相矛盾. 故$\{F_\alpha : \alpha<\lambda\}$是 X 的紧有限覆盖.

(2) 对于每一$\alpha<\lambda$, 任取 $x_\alpha\in F_\alpha$, 记 $H=\{x_\alpha : \alpha<\lambda\}$. 对于任一 $A\subset H$ 和 X 的紧子集 K, 由(1), $K\cap A$ 是有限集, 所以 A 是 X 的闭子集, 于是 H 是 X 的离散子集. 故$\{F_\alpha : \alpha<\lambda\}$是 X 的弱遗传闭包保持覆盖.

(3) 我们先证明$\{F_\alpha : \alpha<\lambda\}$是 X 的遗传闭包保持集族. 若不然, 则存在 F_α 的子集 A_α 和$x\in cl(\bigcup_{\alpha<\lambda}A_\alpha)\setminus\bigcup_{\alpha<\lambda}cl(A_\alpha)$, 由于 X 是 Fréchet 空间, 存在$\bigcup_{\alpha<\lambda}A_\alpha$中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 于是有$\alpha_n<\lambda$使得 $x_n\in A_{\alpha_n}$, 这时所有的 $x_n\neq x$. 不妨设这些α_n是互不相同的, 由(2)知, $\langle x_n\rangle$是 X 的闭子集, 这与序列$\{x_n\}$收敛于 x 相矛盾. 故$\{F_\alpha : \alpha<\lambda\}$是 X 的遗传闭包保持集族.

其次, 证明$\{cl(F_\alpha): \alpha<\lambda\}$也是X的遗传闭包保持集族. 对于$cl(F_\alpha)$的闭子集$B_\alpha$, 若存在$y\in cl(\bigcup_{\alpha<\lambda}B_\alpha)\setminus\bigcup_{\alpha<\lambda}B_\alpha$, 由于 X 是 Fréchet 空间, 存在$\bigcup_{\alpha<\lambda}B_\alpha$中的序列$\{y_n\}$收敛于 y, 于是有$\alpha_n<\lambda$使得 $y_n\in B_{\alpha_n}$, 这时所有的 $y_n\neq y$. 不妨设这些α_n是互不相同的, 且 $y_n\in cl(F_{\alpha_n})\setminus F_{\alpha_n}$, 从而存在 F_{α_n} 中的序列$\{y_{nm}\}$收敛于 y_n, 因此 $y\in cl\{y_{nm} : n, m\in N\}$, 于是存在子序列$\{y_{n_jm_j}\}$收敛于 y, 从而每一 F_{α_n} 仅含有序列$\{y_{n_jm_j}\}$的有限项, 不妨设每一 F_{α_n} 至多仅含有序列$\{y_{n_jm_j}\}$中的一项, 于是$\langle y_{n_jm_j}\rangle$是 X 的闭子集, 这与序列$\{y_{n_jm_j}\}$收敛于 y 相矛盾. 故$\{cl(F_\alpha) : \alpha<\lambda\}$是 X 的遗传闭包保持集族. ■

下面证明本节的主要定理.

定理 4.2.6(林寿, 刘川, 戴牧民[1997]) 对于正则空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是局部可分度量空间的闭映象.

(2) X 是度量空间的闭映象且 X 的每一第一可数的(闭)子空间是局部可分的.

(3) X 是具有σ 遗传闭包保持可分 k 网的 Fréchet 空间.

(4) X 是具有由$\aleph_0$子空间组成的σ遗传闭包保持 k 网的Fréchet 空间.

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 设 A 是 X 的第一可数的子空间, 则存在局部可分度量空间 B 和闭映射 f:B$\to$A. 对于每一 x$\in$A, 由定理 1.3.3, ∂f^{-1}(x)是 B 的紧子集, 再由引理 1.3.2, 不妨设 f 是完备映射, 从而 A 是 X 的局部可分的度量子空间.

(2)$\Rightarrow$(4). 由引理 1.4.3, X 是 Fréchet 空间. 设 f:M$\to$X 是闭映射, 其中 M 是度量空间. 让$\mathcal{B}$是 M 的σ局部有限基. 由引理 2.2.4, f($\mathcal{B}$)是 X 的σ遗传闭包保持 k 网. 由引理 4.1.2 和引理 4.2.2, 不妨设 X 有 k 网$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$, 其中每一$\mathcal{P}_n$是 X 的关于有限交封闭的遗传闭包保持的闭集族且$\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$. 对于每一n$\in$N, 置 D_n={x$\in$X : $(\mathcal{P}_n)_x$ 不是有限的}, $\mathcal{F}_n$={P$\setminus D_n$: P$\in\mathcal{P}_n$}$\cup$ {{x} : x$\in D_n$}. 由引理 4.1.3, 有

(6.1) D_n是 X 的离散子集;

(6.2) $\mathcal{F}_n$是 X 的关于有限交封闭的紧有限集族;

(6.3) $\mathcal{F}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{F}_n$是 X 的 k 网.

定义

$\mathcal{H}$={F$\in\mathcal{F}$: cl(F)是 X 的$\aleph_1$紧子集}.

由(6.1)和推论 4.1.5, $\mathcal{H}$是 X 的由$\aleph_0$子空间组成的σ遗传闭包保持的子集族. 我们证明$\mathcal{H}$是 X 的 k 网. 对于 K$\subset$U, 其中 K 和 U 分别是 X 的紧子集和开子集, 因为$\mathcal{F}$是 X 的紧可数覆盖, 存在至多可数个由$\mathcal{F}$的元组成 K 的有限覆盖, 记其为<$\mathcal{R}_i$>. 对于每一 n$\in$N, 让 $A_n=\cup(\bigwedge_{i\le n}\mathcal{R}_i)$. 由(6.3), {$A_n$}是 K 在 X 中递减的网. 由于 X 的每一第一可数的闭子空间是局部$\aleph_1$紧的, 从引理 4.2.4 的证明, 存在 m$\in$N 使得 $A_m\subset$U 且 cl(A_m)是 X 的$\aleph_1$紧的子空间. 因为 A_m是$\mathcal{F}$的元的有限交的有限并, 由(6.2), 存在$\mathcal{G}\in\mathcal{F}^{<\omega}$, n$\in$N 和 D$\subset D_n$使得 A_m=($\cup\mathcal{G}$)$\cup$D. 置$\mathcal{H}'=\mathcal{G}\cup${{x} : x$\in$K$\cap$D}, 则$\mathcal{H}'\in\mathcal{H}^{<\omega}$且K$\subset\cup\mathcal{H}'\subset$U. 因此, $\mathcal{H}$是X的k网. 故X具有由$\aleph_0$子空间组成的σ遗传闭包保持 k 网的Fréchet 空间.

(4)$\Rightarrow$(3)是显然的. 下面证明(3)$\Rightarrow$(1). 设 Fréchet 空间 X 有σ遗传闭包保持的可分 k 网$\mathcal{P}$. 记$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$, 其中每一$\mathcal{P}_n$是 X 的遗传闭包保持的闭子集族, $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$且$\mathcal{P}_n$的每一元是 X

的可分子空间. 对于每一 $n\in N$, 置 $P_n=\cup\mathcal{P}_n$, $F_n=P_n\setminus P_{n-1}$, 其中 $F_0=\varnothing$. 那么 $<P_n>$ 是 X 的闭覆盖且 $P_n\subset P_{n+1}$. 因为 X 是 k 空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网, X 关于 $<P_n>$ 具有弱拓扑, 于是 X 由 $<P_n>$ 控制. 又因为 X 是 Fréchet 空间, 由引理 4.2.5, $<F_n>$ 是 X 的遗传闭包保持覆盖. 定义

$\mathcal{F}=\{P\setminus P_{n-1}: n\in N, P\in\mathcal{P}_n\}=\{F_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$,

$Z=\oplus_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{cl}(F_\alpha)$,

$f:Z\to X$ 是显然映射.

易验证, $\mathcal{F}$ 是 X 的遗传闭包保持覆盖, 于是 f 是闭映射. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 由推论 4.1.5 和引理 4.2.1, 存在可分度量空间 M_α 和闭映射 $g_\alpha:M_\alpha\to\mathrm{cl}(F_\alpha)$. 定义 $M=\oplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$, $g=f\circ(\oplus_{\alpha\in\Lambda}g_\alpha):M\to X$. 则 g 是从局部可分度量空间 M 到 X 上的闭映射, 于是 X 是局部可分度量空间的闭映象. ▮

4.3 控制族与闭映射

空间的遗传闭包保持的闭覆盖是控制族. 用控制族来刻画 Lašnev 空间更具有一般性. Tanaka 和周浩旋[1985/86]讨论了由度量空间族控制的广义度量空间的可度量性质. Lašnev 空间未必由度量空间族控制. 1983 年 T. Miwa(Tanaka 和周浩旋[1985/86])曾提出下述问题.

问题 4.3.1 设 Y 是度量空间. 如果 B 是 Y 的闭子集, 那么 Lašnev 空间 Y/B 是否由度量空间族控制?

Tanaka 和周浩旋[1985/86]构造了反例否定了 Miwa 问题. 由于控制族在 CW 复形及广义度量空间理论中的重要位置, 进一步探讨 Miwa 问题是很有意义的, 如寻求 Lašnev 空间是由度量空间族控制的充要条件是一个有趣的问题. 这是本节介绍的第一部分内容. 与 Miwa 问题相关的另一类空间是正规度量空间, 它可以刻画为任一闭映象是可度量空间(定理 1.3.4), 本节的第二部分内容是讨论"任一闭映象是由度量空间族控制的度量空间"的特征.

引理 4.3.2 设空间 X 由度量空间族控制, 则 X 具有 σ 紧有限 k 网.

证明. 设空间 X 由度量空间族 $\{P_\alpha: \alpha<\lambda\}$ 控制. 令 $F_0=P_0$, $F_\alpha=P_\alpha\setminus\bigcup_{\gamma<\alpha}P_\gamma$, $0<\alpha<\lambda$. 由引理 4.2.5, $\{F_\alpha: \alpha<\lambda\}$ 是 X 的紧有限覆盖. 对于每一 $\alpha<\lambda$, 让 $\mathcal{F}_\alpha$ 是 F_α 的 σ 紧有限 k 网. 令 $\mathcal{F}=\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathcal{F}_\alpha$, 则 $\mathcal{F}$ 是 X 的 σ 紧有限 k 网. ▮

定理 4.3.3(Tanaka[1987a]) 设空间 X 由度量空间族控制, 则 X 是度量空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

证明. 只须证明充分性. 设空间 X 由度量空间族控制且 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 由引理 4.3.2 和推论 2.1.11, X 是第一可数空间. 由引理 4.2.5, X 具有遗传闭包保持的可度量的闭覆盖, 于是 X 是度量空间的闭映象, 再由定理 1.3.3, X 是度量空间. ▌

引理 4.3.4 让 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的星可数覆盖, 则 $\mathcal{P}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha$, 其中每一 $\mathcal{P}_\alpha$ 是可数的. 令 $X_\alpha=\cup\mathcal{P}_\alpha$, 那么

(1) $X_\alpha\cap X_\beta\neq\varnothing$ 当且仅当 $\alpha=\beta$.

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网, 则每一 $\mathcal{P}_\alpha$ 是 X_α 的可数 k 网.

(3) 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网, 则$\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是紧有限的. 若 X 是 k 空间, 则$\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是弱遗传闭包保持的. 若 X 是正则的 k 空间, 则对于每一可数的 $\Gamma\subset\Lambda$ 存在 Λ 的可数子集 Σ 使得 $cl_s(\bigcup_{\alpha\in\Gamma}X_\alpha)\subset\bigcup_{\alpha\in\Sigma}X_\alpha$.

证明. 设$\mathcal{P}=\{P_\gamma:\gamma\in\Omega\}$是空间X的星可数覆盖. 对于$\gamma,\delta\in\Omega$, 定义$\gamma\sim\delta$当且仅当存在 $P_1, P_2, \ldots, P_n\in\mathcal{P}$ 使得 $P_\gamma\cap P_1\neq\varnothing, \ldots, P_i\cap P_{i+1}\neq\varnothing, \ldots, P_n\cap P_\delta\neq\varnothing$. 由这定义的~是 Ω 上的等价关系, 于是指标集 Ω 被分解为两两互不相交的可数子集之并 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\Omega_\alpha$. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 让 $\mathcal{P}_\alpha=\{P_\gamma:\gamma\in\Omega_\alpha\}$. 则 $\mathcal{P}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha$ 且每一 $\mathcal{P}_\alpha$ 是可数的. 显然, $X_\alpha\cap X_\beta\neq\varnothing$ 当且仅当 $\alpha=\beta$. 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网, 那么对于每一 $\alpha\in\Lambda$, $\mathcal{P}_\alpha$ 是 X_α 的可数 wcs*网, 这时 $\mathcal{P}_\alpha$ 也是 X_α 的可数网, 所以 X_α 的每一紧子集是第一可数的, 由引理 2.1.6, $\mathcal{P}_\alpha$ 是 X_α 的 k 网. 下面证明(3)成立.

设$\mathcal{P}$是X的k网. 让K是X的紧子集, 存在$\mathcal{P}$的有限子族$\mathcal{P}'$有$K\subset\cup\mathcal{P}'$. 记$\mathcal{P}'=\{P_i:i\leq n\}$. 对于每一 P_i, 存在 X_{α_i} 使得 $P_i\subset X_{\alpha_i}$, 因此 $K\subset\bigcup_{i\leq n}X_{\alpha_i}$. 由(1), 对于每一 $\alpha\in\Lambda\setminus\{\alpha_i:i\leq n\}$, K 与 X_α 不相交, 所以$\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是紧有限的. 从而当 X 是 k 空间时, $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$在 X 中是弱遗传闭包保持的.

设 X 是正则的 k 空间. 让 Γ 是 Λ 的可数子集, 为证明的简明起见, 记 $\mathrm{cl}_s(\bigcup_{\delta\in\Gamma} X_\delta)=[\Gamma]_s$. 设对于 Λ 的任一可数子集 Σ, $[\Gamma]_s \not\subset \bigcup_{\alpha\in\Sigma} X_\alpha$, 则可选取 $\Lambda\setminus\Gamma$ 的子集 $\{\mu_\alpha : \alpha<\omega_1\}$ 和 X 的子集 A=$\{x_\alpha : \alpha<\omega_1\}$ 使得每一 $x_\alpha \in X_{\mu_\alpha}\cap[\Gamma]_s$, 且当 $\alpha\neq\beta$ 时有 $\mu_\alpha\neq\mu_\beta$. 那么 A 是 X 的离散子集, 于是对于每一 $\alpha<\omega_1$, 存在 x_α 的邻域 U_α 使得 $\mathrm{cl}(U_\alpha)\cap A=\{x_\alpha\}$, 且存在 $\bigcup_{\delta\in\Gamma} X_\delta$ 中的序列 $\{x_{\alpha n}\}$ 收敛于 x_α. 因为 $\mathcal{P}$ 是 k 网, 于是又存在 $P_\alpha\in\bigcup_{\delta\in\Gamma}\mathcal{P}_\delta$ 使得 $P_\alpha\subset U_\alpha$ 且 P_α 含有序列 $\{x_{\alpha n}\}$ 的无限项, 因此 $\mathrm{cl}(P_\alpha)\cap A_\alpha=\{x_\alpha\}$, 特别地当 $\alpha\neq\beta$ 时有 $P_\alpha\neq P_\beta$, 这与 $\bigcup_{\delta\in\Gamma}\mathcal{P}_\delta$ 的可数性相矛盾. ▮

形如引理 4.3.4 的 $\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$ 或 $\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$ 分别称为 $\mathcal{P}$ 或 X 的星可数分解. 由引理 4.3.4, 具有星可数 k 网的空间具有 σ 紧有限 k 网, 具有星可数 k 网的 k 空间具有 σ 弱遗传闭包保持 k 网.

下述定理完满地回答了问题 4.3.1, 为了定理证明的方便, 我们引用 McCoy, Ntantu[1988]的下述术语: 空间 X 的覆盖 $\mathcal{P}$ 称为 X 的 K 覆盖, 若 X 的每一紧子集含于 $\mathcal{P}$ 的某元中.

定理 4.3.5(林寿[1997b]; Tanaka, 周浩旋[1985/86]) 设 $f:Z\to X$ 是闭映射, 其中 Z 是度量空间, 则下述条件相互等价:

(1) X 由度量空间族控制.

(2) X 有遗传闭包保持的可度量的闭覆盖.

(3) X 有 σ 遗传闭包保持的可度量的闭 k 网.

(4) f 满足

(a) 每一 $\partial f^{-1}(x)$ 是 Z 的局部紧子集.

(b) $\{x\in X:\ \partial f^{-1}(x)$ 不是 Z 的紧子集$\}$ 是 X 的离散子集.

证明. 由引理 4.2.5 知(1)$\Leftrightarrow$(2).

(2)$\Rightarrow$(4). 设 X 有遗传闭包保持的可度量的闭覆盖 $\mathcal{P}$. 记 $\mathcal{P}=\{P_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 先证明 f 满足条件(a). 对于每一 $z\in\partial f^{-1}(x)$, 让 $\langle V_n\rangle$ 是 z 在 Z 中递减的局部基, 则某个 $f(V_n)$ 含于 $\mathcal{P}$ 的有限子集的并中. 否则, 存在 X 中的序列 $\{x_n\}$ 和 Λ 的子集 $\langle\alpha_n\rangle$ 使得每一 $x_n\in f(V_n)\cap P_{\alpha_n}\setminus\bigcup_{i<n}P_{\alpha_i}$,

从而$\langle x_n\rangle$是 X 的离散子集且序列$\{x_n\}$收敛于 x, 矛盾. 因此, 存在 $m\in N$ 和Λ的有限子集Λ'使得 $V_m\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}f^{-1}(P_\alpha)$. 于是 $V_m\cap\partial f^{-1}(x)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\partial f_\alpha^{-1}(x)$, 其中 $f_\alpha=f_{|f^{-1}(P_\alpha)}$. 由定理 1.3.3, 每一$\partial f_\alpha^{-1}(x)$是 X 的紧子集, 故$\partial f^{-1}(x)$是局部紧的.

其次, 证明 f 满足条件(b). 令 $D=\{x\in X:(\mathcal{P})_x$不是有限的$\}$. 由引理 4.1.3 的(3.1), 对于 X 的任一紧子集 K, $K\cap D$ 是有限集. 因为 X 是 k 空间, 所以 D 是 X 的离散子集. 要证 f 满足条件(b)只须证$\{x\in X:\partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}\subset D$. 若 $x\in X\setminus D$, 那么$(\mathcal{P})_x$是有限的, 令 $V=X\setminus\cup\{P\in\mathcal{P}:x\notin P\}$, 则 V 是 x 在 X 中的开邻域 V 且 $V\subset\bigcup(\mathcal{P})_x$, 所以 V 是 X 的第一可数的开子集, 因此 X 在 x 具有可数的局部基. 由定理 1.3.3, $\partial f^{-1}(x)$是 Z 的紧子集. 故(b)成立.

(4)$\Rightarrow$(3). 设 f 满足条件(a)和(b). 由引理 1.3.2, 不妨设 f 满足

(5.1) 每一 $f^{-1}(x)$是 Z 的局部紧子集.

(5.2) $\{x\in X:f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集.

记

$L=\{x\in X: f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}=\{x_\alpha:\alpha<\lambda\}$, $F_\alpha=f^{-1}(x_\alpha)$, $\alpha<\lambda$.

那么

(5.3) 若每一 F_α 是 Z 的 Lindelöf 子空间, 那么存在 X 的可度量的递增的闭覆盖$\langle D_n\rangle$使得$\langle D_n\rangle$是 X 的 K 覆盖.

对于每一$\alpha<\lambda$, 由于 F_α 是 Z 的局部紧的 Lindelöf 子空间, 存在 F_α 的递增的紧覆盖$\langle K_\alpha^n\rangle$使得$\langle K_\alpha^n\rangle$是 F_α 的 K 覆盖. 由 L 的离散性及 Z 的可度量性, 存在 Z 的离散开子集族$\{G_\alpha:\alpha<\lambda\}$使得每一$F_\alpha\subset G_\alpha$. 设 d 是 Z 上的度量, 对于$F\subset Z$, $n\in N$, 记 $S_n(F)=\{z\in Z:d(z,F)<1/n\}$. 置

$G_\alpha^n=G_\alpha\cap S_n(F_\alpha\setminus K_\alpha^n)$, $n\in N$, $\alpha<\lambda$

$Z_n=Z\setminus\bigcup_{\alpha<\lambda}G_\alpha^n$, $D_n=f(Z_n)$,

$f_n=f_{|Z_n}:Z_n\to D_n$.

那么$\langle Z_n\rangle$是 Z 的递增的闭覆盖, f_n 是闭映射, 于是$\langle D_n\rangle$是 X 的递增的闭覆盖且对于每一 $x\in D_n$ 有

$$(f_n)^{-1}(x)=\begin{cases} K_\alpha^n \setminus G_\alpha^n, & \text{存在}\alpha<\lambda\text{使得}x=x_\alpha \\ f^{-1}(x)\cap Z_n, & x\in D_n\setminus L \end{cases},$$

从而 f_n 是完备映射, 所以 D_n 是 X 的可度量子空间. 若存在 X 的紧子集 K 使得每一 $D_n \not\supset K$, 则存在 K 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in K\setminus D_n$, 这时$\langle x_n\rangle$是紧度量空间 K 的无限子集, 于是存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$收敛于 K 中的某点 x 且所有的 $x_{n_i}\neq x$. 对于每一 $m\in N$, $D_m\cap \langle x_{n_i}\rangle$是有限集, 所以存在 $i_m\in N$ 使得当 $i\geq i_m$ 时有 $x_{n_i}\in X\setminus D_m\subset f(\bigcup_{\alpha<\lambda}G_\alpha^m)$, 从而存在 $z_i\in f^{-1}(x_{n_i})\cap(\bigcup_{\alpha<\lambda}G_\alpha^m)$. 由引理 2.2.3, $\{z_i\}_{i\geq i_m}$ 存在收敛的子序列, 设 z 是$\{z_i\}_{i\geq i_m}$ 的一个聚点, 那么 $z\in f^{-1}(x)\cap cl(\bigcup_{\alpha<\lambda}G_\alpha^m)$. 由于$\{G_\alpha^m : \alpha<\lambda\}$是 Z 的离散集族, 于是 $cl(\bigcup_{\alpha<\lambda}G_\alpha^m)=\bigcup_{\alpha<\lambda}cl(G_\alpha^m)$, 所以存在$\alpha<\lambda$使得 $z\in cl(G_\alpha^m)\subset cl(S_m(F_\alpha\setminus K_\alpha^m))\subset S_{m-1}(F_\alpha\setminus K_\alpha^m)$, 从而有 $p_m\in F_\alpha\setminus K_\alpha^m$ 使得 $d(z, p_m)<1/(m-1)$. 又由于 $G_\alpha^{m+1}\subset G_\alpha^m\subset G_\alpha$, 对于任意的 $m\in N$, α是固定不变的. 这时序列$\{p_m\}$收敛于 $z\in F_\alpha$, 因此对于某个 $n\in N$ 有$[p_m]\subset K_\alpha^n$, 矛盾. 故$\langle D_n\rangle$是 X 的 K 覆盖.

现在, 对于$\alpha<\lambda$, F_α 是 Z 的局部紧的可度量子空间, 于是 F_α 具有由 Lindelöf 子空间组成的星可数开覆盖. 由引理 4.3.4, F_α 可表为 Lindelöf 子空间的拓扑和, 记 $F_\alpha=\oplus_{\beta<\gamma}L_\alpha^\beta$, 其中每一 L_α^β 是 Lindelöf 的. 这时$\{L_\alpha^\beta : \alpha<\lambda, \beta<\gamma\}$是 Z 的离散闭集族, 于是存在 Z 的离散开子集族$\{G_\alpha^\beta : \alpha<\lambda, \beta<\gamma\}$使得每一 $L_\alpha^\beta\subset G_\alpha^\beta$. 置

$Z_\beta=cl(\bigcup_{\alpha<\lambda}G_\alpha^\beta)$, $X_\beta=f(Z_\beta)$, $\beta<\gamma$,

$Z_\gamma=cl(Z\setminus\bigcup_{\alpha<\lambda}G_\alpha^\beta)$, $X_\gamma=f(Z_\gamma)$,

$f_\beta=f_{|Z_\beta}: Z_\beta\to X_\beta$, $\beta\leq\gamma$.

那么$\{Z_\beta : \beta\leq\gamma\}$是 Z 的局部有限的闭覆盖, f_β 是闭映射, 于是$\{X_\beta : \beta\leq\gamma\}$是 X 的遗传闭

包保持的闭覆盖且对于每一 $x \in X_\beta$ 有

$$(f_\beta)^{-1}(x)=\begin{cases} L_\alpha^\beta\ ，存在\alpha<\lambda使得x=x_\alpha \\ f^{-1}(x)\cap Z_\beta,\ x\in X_\beta\setminus L, \end{cases}$$

从而$(f_\beta)^{-1}(x)$是 Z_β 的 Lindelöf 子空间. 由(5.3), X_β 存在可度量的闭覆盖<D_β^n>使得<D_β^n>是 X_β 的K覆盖. 由于D_β^n是可度量空间, 让$\bigcup_{m\in N}\mathcal{B}_\beta^{n,m}$是$D_\beta^n$的闭k网, 其中每一$\mathcal{B}_\beta^{n,m}\subset\mathcal{B}_\beta^{n,m+1}$且$\mathcal{B}_\beta^{n,m}$是 D_β^n的局部有限集族. 置$\mathcal{H}^{n,m}=\bigcup_{\beta\le\gamma}\mathcal{B}_\beta^{n,m}$, 那么$\mathcal{H}^{n,m}$是 X 的由可度量子空间组成的遗传闭包保持的闭集族. 再置 $\mathcal{H}=\bigcup_{n,m\in N}\mathcal{H}^{n,m}$.

(5.4) $\mathcal{H}$是 X 的 k 网.

对于$K\subset U$, 其中 K 和 U 分别是 X 的紧子集和开子集. 置 $D=\{x\in K:\{X_\beta:\beta\le\gamma\}$在 x 不是点有限的}. 因为$\{X_\beta:\beta\le\gamma\}$是 X 的遗传闭包保持的闭覆盖, 由引理 4.1.3的(3.1), D 是有限集且$\{K\cap X_\beta\setminus D:\beta\le\gamma\}$是有限族, 于是存在有限个$\beta_i\le\gamma$使得 $K\subset\bigcup_{i\le j}X_{\beta_i}$. 对于$i\le j$, 存在 $n_i\in N$ 使得 $K\cap X_{\beta_i}\subset D_{\beta_i}^{n_i}$, 于是存在 $m_i\in N$ 和 $\mathcal{B}_{\beta_i}^{n_i,m_i}$ 的有限子族 $\mathcal{B}_i$ 使得 $K\cap X_{\beta_i}\subset\cup\mathcal{B}_i\subset U$. 令$\mathcal{H}'=\bigcup_{i\le j}\mathcal{B}_i$, 那么$\mathcal{H}'$是$\mathcal{H}$的有限子族且 $K\subset\cup\mathcal{H}'\subset U$. 故 X 有$\sigma$遗传闭包保持的可度量的闭 k 网.

(3)$\Rightarrow$(2). 设 X 有σ遗传闭包保持的可度量的闭 k 网. 由定理 4.2.6 的(3)$\Rightarrow$(1)的证明知, X 有遗传闭包保持的可度量的闭覆盖. █

推论 4.3.6 若 Y 是度量空间, B 是 Y 的闭子集, 那么 Y/B 由度量空间族控制当且仅当∂B是 Y 的局部紧的子空间. █

定理 4.3.7(Siwiec[1976]; Tanaka, 刘川[1999]) 设 $f:Z\to X$ 是闭映射, 其中 Z 是度量空间, 那么下述条件相互等价:

(1) X 由度量空间的可数族控制.

(2) X 有σ局部有限的可度量的闭 k 网.

(3) X 有点可数的可度量的闭 k 网.

(4) X 有点可数的可度量的 cs*网且$\{x\in X:\partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集}是 X 的离散子集.

(5) f 满足

(a) 每一$\partial f^{-1}(x)$是 Z 的局部紧的 Lindelöf 子集.

(b) $\{x\in X:\ \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集.

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 设空间 X 由度量空间的可数族控制, 由引理 4.2.5, X 具有遗传闭包保持的可度量的闭覆盖$\langle X_n\rangle$. 设 $\mathcal{P}_n$ 是 X_n 的σ 局部有限的闭 k 网. 由定理 4.3.5 的(5.4)的证明知, $\langle\bigcup_{i\le n}X_i\rangle$是 X 的 K 覆盖, 于是$\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$ 是 X 的σ 局部有限的可度量的闭 k 网.

(2)$\Rightarrow$(4). 设空间 X 具有σ 局部有限的可度量的闭 k 网. 显然, X 具有点可数的可度量的 cs*网. 由定理 4.3.5, $\{x\in X:\ \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集.

(4)$\Rightarrow$(3). 设空间 X 有点可数的可度量的 cs*网 $\mathcal{P}$ 且$\{x\in X:\ \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集. 由引理 1.3.2, 不妨设 $L=\{x\in X:\ f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集. 让 $L=\{x_\alpha:\ \alpha<\lambda\}$, 那么存在 X 的离散开子集族$\{V_\alpha:\ \alpha<\lambda\}$使得每一 $x_\alpha\in V_\alpha$. 令 $\mathcal{F}=\{cl(P\cap V_\alpha):x_\alpha\in P\in\mathcal{P},\ \alpha<\lambda\}\bigcup\{f(Z\setminus S_n(f^{-1}(L))):n\in N\}$. 则 $\mathcal{F}$ 是 X 的点可数的闭覆盖. 首先, 证明 $\mathcal{F}$ 的每一元是可度量的. 对于每一 $n\in N$, 若 $x\in X\setminus L$, 则 $f^{-1}(x)$是 Z 的紧子集, 由定理 1.3.3, $X\setminus L$ 的子集 $f(Z\setminus S_n(f^{-1}(L)))$是可度量的. 对于每一 $x_\alpha\in P\in\mathcal{P}$, 若 $x\in cl(P\cap V_\alpha)$, 如果$x\ne x_\alpha$, 那么$f^{-1}(x)$是 Z 的紧子集, 于是 x 在子空间 $cl(P\cap V_\alpha)$中具有可数局部基; 如果 $x=x_\alpha$, 那么 x 在子空间 $P\cap V_\alpha$ 中具有可数局部基, 因为 X 是正则空间, 所以 x 在子空间 $cl(P\cap V_\alpha)$中具有可数局部基. 因此 $cl(P\cap V_\alpha)$也是可度量的. 其次, 证明 $\mathcal{F}$ 是 X 的 cs*覆盖. 设$\{x_i\}$是 X 中收敛于某点 x 的序列. 由引理 1.4.2, 存在 Z 中收敛于某点 z 的序列$\{z_n\}$使得$\{f(z_n)\}$是$\{x_i\}$的子序列且 $x=f(z)$. 若存在$\alpha<\lambda$使得 $x=x_\alpha$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得$\{f(z_n)\}$的某个子序列是终于 $cl(P\cap V_\alpha)$的. 若 $x\in X\setminus L$, 那么存在 $n\in N$ 使得 $Z\setminus S_n(f^{-1}(L))$是 z 的闭邻域, 于是序列$\{f(z_n)\}$是终于 $f(Z\setminus S_n(f^{-1}(L)))$的. 故 $\mathcal{F}$ 是 X 的 cs*覆盖.

令 $\mathcal{F}=\{F_\beta:\ \beta\in\Gamma\}$. 对于每一$\beta\in\Gamma$, 让$\mathcal{F}_\beta$是$F_\beta$的点可数的闭 cs*网. 再令$\mathcal{G}=\bigcup_{\beta\in\Gamma}\mathcal{F}_\beta$, 则 $\mathcal{G}$ 是 X 的点可数的可度量的闭 cs*网. 由引理 2.1.6, $\mathcal{G}$ 是 X 的 k 网.

(3)$\Rightarrow$(5). 设空间 X 具有点可数的可度量的闭 k 网 $\mathcal{G}$.

首先，证明每一$\partial f^{-1}(x)$是Z的Lindelöf子空间．若不然，则存在$x_0\in X$使得$\partial f^{-1}(x_0)$不是Z的 Lindelöf 子空间，于是存在$\partial f^{-1}(x_0)$的子集$\{x_\alpha : \alpha<\omega_1\}$以及 X 的离散开子集族$\{D_\alpha : \alpha<\omega_1\}$使得每一$x_\alpha\in D_\alpha$．对于每一$\alpha<\omega_1$，若 V 是 X 中含$x_0$的开子集，那么$f^{-1}(V)\cap(D_\alpha\setminus f^{-1}(x_0))\neq\varnothing$，即$V\cap(f(D_\alpha)\setminus\{x_0\})\neq\varnothing$，于是$x_0\in cl(f(D_\alpha)\setminus\{x_0\})$．因为X是Fréchet空间，存在$f(D_\alpha)\setminus\{x_0\}$中的序列$\{x_{\alpha n}\}$收敛于$x_0$．由于$\{cl(f(D_\alpha)) : \alpha<\omega_1\}$是 X 的遗传闭包保持集族，$\{[x_{\alpha n}] : \alpha<\omega_1\}$是 X 的遗传闭包保持集族．由引理 4.1.3 的(3.1)和超限归纳法，不妨设$\{\langle x_{\alpha n}\rangle : \alpha<\omega_1\}$是两两互不相交的集族．这时，X 的闭子空间$\bigcup_{\alpha<\omega_1}[x_{\alpha n}]$同胚于 S_{ω_1}．由例1.5.2, X不含有闭子空间同胚于S_{ω_1}.矛盾．故每一$\partial f^{-1}(x)$是 Z 的 Lindelöf 子空间.

其次，证明对于每一$x\in X$，$\partial f^{-1}(x)$是 Z 的局部紧子集．对于每一 $z\in\partial f^{-1}(x)$，让$\langle V_n\rangle$是 z 在 Z 中递减的局部基，于是$\{f(V_n)\}$是 x 在 X 中递减的网．由引理 2.1.5, $\mathscr{G}$满足条件(A)，从而存在$\mathscr{G}'\in\mathscr{G}^{<\omega}$使得 $x\in int_s(\cup\mathscr{G}')$．由引理 1.4.10 和引理 1.4.7，$\cup\mathscr{G}'$是 x 在 X 中的邻域，因此存在$m\in N$ 使得 $f(V_m)\subset\cup\mathscr{G}'$．令 $\mathscr{G}'=\{G_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$，则 $V_m\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}f^{-1}(G_\alpha)$．于是$V_m\cap\partial f^{-1}(x)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\partial f_\alpha^{-1}(x)$，其中 $f_\alpha=f_{|f^{-1}(G_\alpha)}$．由定理1.3.3，每一$\partial f_\alpha^{-1}(x)$是X的紧子集，故$\partial f^{-1}(x)$是局部紧的.

最后，证明$\{x\in X：\partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集．令

$C=\{x\in X：\partial f^{-1}(x)$是 Z 的紧子集$\}$,

$D=\{x\in X$：存在$(\mathscr{G})_x$的有限子集$\{G_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$使得$\partial f^{-1}(x)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\partial f_\alpha^{-1}(x)\}$,

$E=\{x\in X$：存在$\mathscr{G}'\in\mathscr{G}^{<\omega}$使得$x\in int(\cup\mathscr{G}')\}$.

显然，$D\subset C$．若 $x\in E$，则存在 $\mathscr{G}'\in\mathscr{G}^{<\omega}$使得 $x\in int(\cup\mathscr{G}')$．让 $\mathscr{G}'=\{G_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$，那么$\partial f^{-1}(x)\subset cl(f^{-1}(\cup\mathscr{G}')\setminus f^{-1}(x))$，于是$\partial f^{-1}(x)\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\partial f_\alpha^{-1}(x)$，从而 $x\in D$，即 $E\subset D$．若 $X\setminus E$不是X的离散子集，由于X是Fréchet空间，存在$X\setminus E$中点组成的序列$\{x_n\}$收敛于某点$x\in E$，于是存在 X 的开子集列$\{V_n\}$使得每一$x_n\in V_n$且$x\notin cl(V_n)$．让$(\mathscr{G})_x=\langle G_n\rangle$，并且对于每一$n\in N$,

让 $A_n=V_n\setminus\bigcup_{m\le n}G_m$，那么 $x_n\in cl(A_n)$，于是 $x\in cl(\bigcup_{n\in N}A_n)$，从而存在 $\bigcup_{n\in N}A_n$ 中的序列 S 收敛于 x，因此存在 $i\in N$ 使得 G_i 含有序列 S 的无限项，这表明 $x\in cl((\bigcup_{n\in N}A_n)\cap G_i)$，因而对于某个 j<i 有 $x\in cl(A_j)$，故 $x\in cl(V_j)$，矛盾. 这说明 $X\setminus E$ 是 X 的离散子集，所以{$x\in X$: $\partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集}也是 X 的离散子集.

(5)$\Rightarrow$(1). 由定理 4.3.5 的(5.3), X 存在可度量的递增的闭覆盖$\langle D_n\rangle$使得$\langle D_n\rangle$是 X 的 K 覆盖, 于是 X 关于$\langle D_n\rangle$具有弱拓扑，从而 X 由$\langle D_n\rangle$控制. ▮

问题 4.3.8 设 $f:Z\to X$ 是闭映射, Z 是度量空间. 刻画分别满足定理 4.3.5 的条件(a)或(b)的空间 X.

定理 4.3.9(林寿[1997b]) 设 Z 是度量空间，下述条件相互等价:

(1) Z 的任一闭映象由可度量空间族控制.

(2) 若 F 是 Z 的闭子集，那么∂F是局部紧的.

(3) Z 的非孤立点集是 Z 的局部紧子集.

(4) Z 是局部的正规度量空间.

证明. 以 Z'表示 Z 的非孤立点集.

(1)$\Rightarrow$(2). 设 F 是 Z 的闭子集，让 q 是从 Z 到 Z/F 上的自然商映射，则 q 是闭映射，于是 Z/F 由可度量空间族控制. 由推论 4.3.6 知∂F是 Z 的局部紧的子空间.

(2)$\Rightarrow$(3). 如果 Z'不是局部紧的，那么存在 $z\in Z'$ 及 z 在 Z'中递减的可数局部基$\langle V_n\rangle$使得每一 $cl(V_n)$不是 Z'的紧子集. 由归纳法可选取子集列$\{V_{n_i}\}$以及每一 $cl(V_{n_i})$的可数离散子集 D_i 使得 $cl(V_{n_i})\cap(\bigcup_{j<i}D_j)=\varnothing$. 置 $D=\{z\}\cup(\bigcup_{i\in N}D_i)$，则 D 是 Z 的闭子集. 由于 D 不含有 Z 的孤立点且以 z 为唯一聚点，所以$\partial D=D$. 但是 D 不是 Z 的局部紧子集，这与条件(2)矛盾，故 Z'是局部紧的.

(3)$\Rightarrow$(4). 对于 $z\in Z$, 若 z 是 Z 的孤立点，那么{z}是 z 在 Z 中的可正规度量的邻域. 若 z 不是 Z 的孤立点，由条件(3)知存在 z 在 Z 中的开邻域 V 使得 $cl(V\cap Z')$是紧子集. 置 $U=cl(V\cap Z')\cup(V\setminus Z')$，那么 U 是 z 在 Z 中的邻域，往证 U 是正规度量空间. 因为 $V\setminus Z'$中的点是 Z 的孤立点，所以 U 的非孤立点集是 $cl(V\cap Z')$的闭子集，于是 U 的非孤立点集是 U 的紧子集. 由定义 1.2.1 知 U 是正规度量空间. 故 Z 是局部的正规度量空间.

(4)$\Rightarrow$(1). 设 Z 是局部的正规度量空间, 由于 Z 是度量空间, 于是 Z 是仿紧空间, 从而 Z 有局部有限的闭覆盖$\{Z_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$使得每一$Z_\alpha$是正规度量空间. 让 f:Z$\to$X 是闭映射. 对于每一$\alpha\in\Lambda$, 置$X_\alpha$=f($Z_\alpha$), 由定理 1.3.4, X_α是可度量空间, 从而$\{X_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$是 X 的遗传闭包保持的可度量的闭覆盖, 故 X 由可度量空间族控制. █

Jayanthan, Kannan[1988]证明了正规度量空间还可刻画为“任一商映象是可度量的空间”, 所以下述问题是很自然的. 若空间 X 是局部的正规度量空间, 那么 X 的任一商映象是否由度量空间族控制? 这一问题的回答是否定的.

例 4.3.10 (1) 存在局部的正规度量空间 Z 使得 Z 的某一开映象不由度量空间族控制.

让ω_1是赋予序拓扑的可数序数空间. 对于$\alpha<\omega_1$, 让 Z_α=[0, α], 那么 Z_α是紧度量空间. 令 Z=$\oplus_{\alpha<\omega_1} Z_\alpha$, 则 Z 是局部紧的度量空间, 于是 Z 是局部的正规度量空间. 让 f:Z$\to\omega_1$是自然映射, 那么 f 是开映射. 因为ω_1不是仿紧空间, 所以ω_1不由度量空间族控制.

(2) 定理 4.3.5(4)中 f 满足的两条件(a)和(b)是相互独立的, 其中(a) 每一$\partial f^{-1}(x)$是 Z 的局部紧子集; (b) $\{x\in X : \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}$是 X 的离散子集.

(10.1) 自然商映射 f: $Q^2\to Q^2/(Q\times\{0\})$满足条件(b), 但它不满足条件(a).

(10.2) 设 Z=$\{(x, y)\in R^2 : 0\le x\le 1, 0\le y<x\}\cup\{(0, 0)\}$. 赋予 Z 通常的欧氏拓扑, 则 Z 是度量空间. 令 X=$\{(x, y)\in R^2 : 0<x<1, x\notin S_1, 0\le y<x\}\cup\{(x, 0) : x\in S_1\}$. 定义 f:Z$\to$X 使得

$$f((x, y))=\begin{cases}(x, 0), & x\in S_1\\ (x, y), & x\in(0,1)\setminus S_1\end{cases}.$$

赋予 X 由 f 诱导的商拓扑, 那么 f 是闭映射. 易验证, 每一$\partial f^{-1}((x, y))=f^{-1}((x, y))$, 所以 f 满足(a). 然而, $\{x\in X : \partial f^{-1}(x)$不是 Z 的紧子集$\}=\{1/n : n\in N\}\times\{0\}$不是 X 的离散子集, 故 f 不满足条件(b).

易验证, 空间 X 具有点可数的可度量的 cs*网.

(3) 存在 gf 可数空间 X 是由紧度量空间族控制, 但是 X 不是 g 可度量空间.

如例 1.5.6 中的空间 X. X 由紧度量空间族$\{I\cup S_x : x\in I\}$控制.

(4) 引理 4.3.4(3)中的正则性是必不可少的.

如例 1.5.8 中的半圆盘拓扑空间 X. 置 $\mathcal{P}=\{\{p\}: p\in L\}\cup\{B(q, 1/n)\cap S : q$ 的两个坐标均是有理数, $n\in N\}$, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的星可数k 网, 于是由 $\mathcal{P}$ 确定的 X 的星可数分解为 $\{S\}\cup\{\{p\}: p\in L\}$. 由于 $cl_s(S)=X$, 从而不存在 L 的可数子集 Σ 使得 $cl_s(S)\subset S\cup\{x : x\in\Sigma\}$. ∎