第三章　关于点有限覆盖列

围绕正规 Moore 空间猜测, Alexandroff[1960]引进了一致基的概念. Arhangel'skii[1962]证明了具有一致基的集态正规空间是可度量空间. 20 世纪 90 年代的研究进一步表明了一致覆盖与 Collins-Reed-Roscoe-Rudin 的度量化定理(Moody[1993]), 具确定 k 网空间的度量化问题(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]; Sakai, Tamano, Yajima[1998]), 序空间(Bennett, Lutzer[1998]), 弱展开与弱一致基空间(Alleche, Arhangel'skii, Calbrix[2000]; Arhangel'skii, Just, Renziczenko, Szeptycki[2000]), 度量空间的商紧映象(Choban[1992]; Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]; 林寿, 燕鹏飞[2001b]), MOBI 类(Bennett, Chaber[1990]; Choban[1992])及具有广义度量因子的乘积空间的正规性(Junnila, Yajima[1998])等课题的联系, 更为人们研究一致覆盖提供了广阔的空间.

本章将围绕度量空间的序列覆盖τ映射、紧映射开展工作, 应用空间的点星网、点正则覆盖、一致覆盖等概念, 建立了度量空间的各类序列覆盖τ映射、紧映射的刻画, 将 1 序列覆盖映射与 2 序列覆盖映射的性质更加发扬光大, 发现了度量空间上特定的序列覆盖映射就是 1 序列覆盖映射, 证明了序列覆盖的闭映射保持可度量性, 解决了 Ikeda, 刘川, Tanaka[2001]和林寿, 燕鹏飞[2001a]提出的两个问题(见问题 3.3.2, 问题 3.4.1).

3.1　点星网与π映射

设 $f:X\rightarrow Y$ 是紧映射, 其中 X 是度量空间. 由定理 1.3.1, 空间 X 存在局部有限的开覆盖列$\{\mathcal{B}_n\}$使得对于 X 的任一非空紧子集 K, $<st(K, \mathcal{B}_n)>$是 K 在 X 中的邻域基, 那么$\{f(\mathcal{B}_n)\}$是空间 Y 的点有限覆盖列且满足: 对于每一 $y\in Y$, $<st(y, f(\mathcal{B}_n))>$是 y 在 Y 中的网. 具有这种覆盖列的空间 Y 是本章研究的重点.

定义 3.1.1　设$\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$是空间 X 的子集族, 其中每一$\mathcal{P}_n$是 X 的覆盖.

(1) $\{\mathcal{P}_n\}$称为 X 的点星网, 若对于每一 $x\in X$, $<st(x, \mathcal{P}_n)>$是 x 在 X 中的网.

(2) 若 X 的点星网$\{\mathcal{P}_n\}$使得每一$\mathcal{P}_n$具有性质 C, 则$\{\mathcal{P}_n\}$称为 X 的 C 点星网.

(3) 若 X 的点星网$\{\mathcal{P}_n\}$使得每一$<st(x, \mathcal{P}_n)>$是 x 在 X 中的具有性质 D 的网, 则$\{\mathcal{P}_n\}$称为 X 的点星 D 网.

术语“点星网”首次在林寿，燕鹏飞[2001b]中使用，它借用在覆盖理论中广泛使用的“点星加细”概念(蒋继光[1991])，具有这种性质的空间早已引起人们的重视，特殊的情形可追溯至可展空间(可重新定义为具有开点星网的空间，见定理 1.3.1)．点星网在 Choban[1969]和 Siwiec[1974]中被称为“半加细”而用以研究度量空间的确定的商映象，在 Tanaka[1991]中被记为条件(A”)*用以研究度量空间的序列覆盖商映象和对称度量空间，在 Ikeda[1999]和 Ikeda，刘川，Tanaka[2002]中又被称为 σ 强网用以研究度量空间的商紧映象．点星弱邻域网在 Martin[1976]中被称为弱展开用以研究度量化问题．使用术语“点星网”似乎更加形象．显然，$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的点星网当且仅当对于每一 $x\in X$ 和任意取定的 $P_n\in(\mathcal{P}_n)_x$，$\langle P_n\rangle$是 x 在 X 中的网．

引理 3.1.2　空间 X 是对称度量空间当且仅当 X 具有点星弱邻域网．

证明．设(X，d)是对称度量空间，对于每一 $n\in N$，置 $\mathcal{P}_n=\{A\subset X: \text{diam}A<1/n\}$，则对于每一 $x\in X$ 有 $st(x, \mathcal{P}_n)=B(x, 1/n)$，从而$\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的点星弱邻域网．反之，设$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的点星弱邻域网，对于 X 中互不相同的两点 x，y，以 n(x，y)表示使得 $x\notin st(y, \mathcal{P}_n)$的最小整数 n．定义 $d:X\times X\to[0, \infty)$使得

$$d(x, y)=\begin{cases} 0, & x=y \\ 2^{-n(x,y)}, & x\neq y \end{cases},$$

则 d 是 X 上的对称距离且对于每一 $x\in X$ 和 $n\in N$ 有 $st(x, \mathcal{P}_n)=B(x, 1/2^n)$，因而 X 是对称度量空间．■

定义 3.1.3(Ponomarev[1960])　设(X，d)是度量空间．映射 $f:X\to Y$ 称为 π 映射，如果对于每一 $y\in U\in\tau(Y)$，有 $d(f^{-1}(y), X\setminus f^{-1}(U))>0$.

显然，定义于度量空间上的紧映射是 π 映射．本节介绍度量空间的商 π 映象和序列覆盖商 π 映象．1969 年 Kofner[1969]证明了度量空间的商 π 映象刻画了弱 Cauchy 空间，1972 年 Burke[1972]证明了度量空间的伪开 π 映象刻画了半度量空间, 1991 年 Tanaka[1991]证明了度量空间的序列覆盖的商 π 映象刻画了 Cauchy 空间．我们用具有特定性质的点星网和度量空间的商映象表现了熟知的半度量空间、弱 Cauchy 空间、Cauchy 空间和可展空间，深化了已有的一系列结果．

为说明点星网与度量空间的 π 映象的关系，下述的定义与引理是很有用的工具．

定义 3.1.4　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖．

(1)(李进金[2000a]) $\mathcal{P}$称为 X 的 cs*覆盖，若 S 是 X 的收敛序列，则存在 P$\in\mathcal{P}$使得 S 的某子序列是终于 P 的.

(2)(燕鹏飞[1998]) $\mathcal{P}$称为 X 的 cs 覆盖，若 X 中的每一收敛序列是终于$\mathcal{P}$中的某元.

(3)(林寿，燕鹏飞[2001b]) $\mathcal{P}$称为 X 的 sn 覆盖(so 覆盖，g 覆盖)，若$\mathcal{P}$中的每一元是 X 中某点的序列邻域(序列开集，弱邻域)且对于任意的 x$\in$X，存在 x 在 X 中的序列邻域(序列开集，弱邻域)P$\in\mathcal{P}$.

术语 cs*覆盖和 cs 覆盖在 Ikeda，刘川，Tanaka[2001]中分别称为条件(c_2)和(c_3)，在 Tanaka[1991]中分别称为条件(D')*和(D)*.

设{$\mathcal{P}_i$}是空间 X 的点星网. 对于每一 i$\in$N，记$\mathcal{P}_i$={P_α : $\alpha\in\Lambda_i$}，Λ_i赋予离散拓扑，令 M={$\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Lambda_i$: <P_{α_i}>构成 X 中某点 x_α 的网}，则 M 是度量空间，并且对于每一$\alpha\in$M，x_α是唯一确定的，于是可以定义函数 f:M$\to$X 使得 f(α)=x_α. 我们称(f, M, X, $\mathcal{P}_i$)为 Ponomarev 系.

引理 3.1.5 设(f, M, X, $\mathcal{P}_i$)是 Ponomarev 系，则存在 M 上的度量 d 使得 f 是π映射. 若更设{$\mathcal{P}_i$}是 X 的点有限覆盖列，则 f 是紧映射.

证明. 对于每一 x$\in$X，i$\in$N，存在$\alpha_i\in\Lambda_i$使得 x$\in P_{\alpha_i}$. 由于{$\mathcal{P}_i$}是 X 的点星网，所以<P_{α_i}>是 x 在 X 中的网. 令$\alpha=(\alpha_i)$，则$\alpha\in$M 且 f(α)=x，故 f 是满函数. 设$\alpha=(\alpha_i)\in$M，f(α)=x$\in$U$\in\tau$(X)，则存在 n$\in$N 使得$P_{\alpha_n}\subset$U. 令 V={$\beta\in$M : β的第 n 个坐标为α_n}，那么 V 是 M 中含α的开子集且 f(V)$\subset P_{\alpha_n}\subset$U，故 f 是连续函数.

对于每一α，$\beta\in$M，定义

$$d(\alpha,\beta)=\begin{cases}0 & ,\alpha=\beta\\ \max\{1/k:\pi_k(\alpha)\neq\pi_k(\beta)\}, & \alpha\neq\beta.\end{cases}$$

则 d 是 M 上的距离. 由于 M 的拓扑是由离散空间族<Λ_i>的积空间所诱导的子空间拓扑，于是 d 是 M 上的度量. 对于每一 x$\in$U$\in\tau$(X)，存在 n$\in$N 使得 st(x, $\mathcal{P}_n$)$\subset$U. 对于$\alpha\in f^{-1}$(x)，$\beta\in$M，若 d(α，β)<1/n，那么当 i$\le$n 时有$\pi_i(\alpha)=\pi_i(\beta)$，于是 x$\in P_{\pi_n(\alpha)}=P_{\pi_n(\beta)}$，从而

$f(\beta)\in\bigcap_{i\in N}P_{\pi_i(\beta)}\subset P_{\pi_n(\beta)}\subset U$, 因此 $d(f^{-1}(x), M\setminus f^{-1}(U))\geq 1/n$, 故 f 是$\pi$映射.

若每一 $\mathcal{P}_i$ 还是 X 的点有限覆盖. 对于每一 $x\in X$, $i\in N$, 置 $\Gamma_i=\{\alpha\in\Lambda_i: x\in P_\alpha\}$, 那么 $\prod_{i\in N}\Gamma_i$ 是 $\prod_{i\in N}\Lambda_i$ 的紧子集. 如果 $\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i$, 那么 $\langle P_{\alpha_i}\rangle$ 是 x 在 X 中的网, 所以 $\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$, 故 $\prod_{i\in N}\Gamma_i\subset f^{-1}(x)$. 如果 $\alpha=(\alpha_i)\in f^{-1}(x)$, 那么 $x\in\bigcap_{i\in N}P_{\alpha_i}$, 于是 $\alpha\in\prod_{i\in N}\Gamma_i$, 故 $f^{-1}(x)\subset\prod_{i\in N}\Gamma_i$. 因此 $f^{-1}(x)=\prod_{i\in N}\Gamma_i$, 即 f 是紧映射. ■

下述定理说明了度量空间上的π映射与点星网之间的一些关系.

定理 3.1.6 (1) 空间 X 是度量空间的序列商(子序列覆盖)π映象当且仅当 X 具有 cs*覆盖的点星网.

(2) 空间 X 是度量空间的 2 序列覆盖π映象当且仅当 X 具有 so 覆盖的点星网.

证明. 设(M, d)是度量空间, $f:M\to X$ 是π映射. 对于每一 $n\in N$, 令 $\mathcal{P}_n=\{f(B(z, 1/n)): z\in M\}$, 那么$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的点星网. 事实上, 对于每一 $x\in U\in\tau(X)$, 存在 $n\in N$ 使得 $d(f^{-1}(x), M\setminus f^{-1}(U))>1/n$. 取定自然数 $m\geq 2n$. 若 $z\in M$ 使得 $x\in f(B(z, 1/m))$, 那么 $f^{-1}(x)\cap B(z, 1/m)\neq\varnothing$. 如果 $B(z, 1/m)\not\subset f^{-1}(U)$, 则 $d(f^{-1}(x), M\setminus f^{-1}(U))<2/m\leq 1/n$, 矛盾. 因此 $B(z, 1/m)\subset f^{-1}(U)$, 从而 $f(B(z, 1/m))\subset U$, 所以 $st(x, \mathcal{P}_m)\subset U$. 故$\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的点星网. 若 f 是子序列覆盖映射, 显然每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs*覆盖. 当 f 是 2 序列覆盖映射时, X 具有 so 覆盖的点星网可以类似地验证.

反之, 设$\{\mathcal{P}_i\}$是空间 X 的点星网. 对于每一 $i\in N$, 记 $\mathcal{P}_i=\{P_\alpha: \alpha\in\Lambda_i\}$. 让$(f, M, X, \mathcal{P}_i)$为 Ponomarev 系. 由引理 3.1.5, $f:M\to X$ 是π映射.

(1) 若$\{\mathcal{P}_i\}$是空间 X 的 cs*覆盖列. 设$\{x_n\}$是 X 中收敛于点 x_0的序列. 不妨设所有的 $x_n\neq x_0$. 由于 $\mathcal{P}_1$是 X 的 cs*覆盖, 存在$\{x_n\}$的子序列 T_1和$\alpha_1\in\Lambda_1$使得 T_1是含于 P_{α_1} 的. 由归纳法, 对于每一 $i\in N$, 可选取序列 T_i和$\alpha_i\in\Lambda_i$使得 T_{i+1}是 T_i 的子序列且 T_i是含于 P_{α_i} 的, 于是 $T_i\subset\bigcap_{k\leq i}P_{\alpha_k}$. 取定$x_{n_i}\in T_i$ 和$\beta_i\in f^{-1}(x_{n_i})$使得$n_i<n_{i+1}$且当$k\leq i$时有$\pi_k(\beta_i)=\alpha_k$, 从而 $\lim_{i\to\infty}\pi_k(\beta_i)=\alpha_k$, 令$\beta_0=(\alpha_i)$, 那么在 M 中序列$\{\beta_i\}$收敛于$\beta_0$. 故 f 是序列商映射, 所以 f 也是子序列覆盖映射.

(2) 若$\{\mathcal{P}_i\}$是空间 X 的 so 覆盖列. 往证 f 是 2 序列覆盖映射. 对于每一 $x\in X$ 和$\beta\in f^{-1}(x)$, 记$\beta=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Lambda_i$, 那么每一$P_{\alpha_i}$是 X 中含点 x 的序列开集且$\langle P_{\alpha_i}\rangle$是 x 在 X 中的网. 对于每一 $n\in N$, 置 $B_n=\{(\gamma_i)\in M$: 对于 $i\le n$ 有$\gamma_i=\alpha_i\}$, 由定理 2.4.6 所证知, $f(B_n)=\bigcap_{i\le n}P_{\alpha_i}$ 且$\langle B_n\rangle$是β在 M 中递减的邻域基. 再由引理 2.4.5, 若 S 是 X 中收敛于 x 的序列, 则存在 M 中收敛于β的序列 T 使得 f(T)=S. 故 f 是 2 序列覆盖映射. ▌

定理 3.1.7 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖π映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖π映象.

(3) X 具有 sn 覆盖的点星网.

(4) X 具有 cs 覆盖的点星网.

证明. (1)$\Rightarrow$(2)是显然的. (2)$\Rightarrow$(4)类似定理 3.1.6 的证明.

(4)$\Rightarrow$(3). 设$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的 cs 覆盖的点星网, 不妨设每一$\mathcal{P}_{n+1}$加细$\mathcal{P}_n$. 如引理 3.1.2, 定义 X 上的对称距离 d 使得对于每一 $x\in X$ 和 $n\in N$ 有 $st(x, \mathcal{P}_n)=B(x, 1/2^n)$, 则 d 具有性质: 对于任一 $x\in X$ 和$\varepsilon>0$, 存在正数$\delta=\delta(x, \varepsilon)$使得当$d(x, y)<\delta$ 且 $d(x, z)<\delta$ 时有 $d(y, z)<\varepsilon$. 否则, 存在$\varepsilon_0>0$ 和序列$\{y_n\}$和$\{z_n\}$使得每一 $d(x, y_n)<1/2^n$, $d(x, z_n)<1/2^n$ 且 $d(y_n, z_n)\ge\varepsilon_0$. 选取 $k\in N$ 使得 $1/2^k<\varepsilon_0$. 由于$\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的点星网, 所以序列$\{y_n\}$和$\{z_n\}$都收敛于 x, 又由于$\mathcal{P}_k$是 X 的 cs 覆盖, 存在 $m\in N$ 和 $P\in\mathcal{P}_k$ 使得$\{y_m, z_m\}\subset P$, 于是 $z_m\in st(y_m, \mathcal{P}_k)$, 从而 $d(y_m, z_m)<1/2^k<\varepsilon_0$, 矛盾. 因此, 对于任一 $x\in X$ 和 $n\in N$, 可以选取正数$\delta=\delta(x, n)$使得当 $d(x, y)<\delta$ 且 $d(x, z)<\delta$ 时有 $d(y, z)<1/n$, 让 $g(n, x)=B(x, \delta(x, n))$. 由于$\mathcal{P}_n$是 X 的 cs 覆盖, 于是 $st(x, \mathcal{P}_n)$ 是 x 的序列邻域, 从而 g(n, x)也是 x 的序列邻域. 令$\mathcal{U}_n=\{g(n, x) : x\in X\}$, 则$\mathcal{U}_n$是 X 的 sn 覆盖. 若$\{\mathcal{U}_n\}$不是 X 的点星网, 则存在 $x\in G\in\tau(X)$和 X 中的序列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$使得 $x\in g(n, y_n)$, $x_n\in g(n, y_n)\setminus G$, 那么序列$\{x_n\}$不收敛于 x 且$d(y_n, x)<\delta(y_n, n)$, $d(y_n, x_n)<\delta(y_n, n)$, 于是 $d(x, x_n)<1/n$, 从而$\{x_n\}$收敛于 x, 矛盾. 故 X 具有 sn 覆盖的点星网.

(3)$\Rightarrow$(1). 设$\{\mathcal{P}_i\}$是空间X中sn覆盖的点星网. 对于每一$i\in N$, 记$\mathcal{P}_i=\{P_\alpha: \alpha\in\Lambda_i\}$. 让$(f, M, X, \mathcal{P}_i)$为Ponomarev系. 由引理3.1.5, $f:M\to X$是π映射. 设$x_0\in X$. 对于每一$i\in N$, 选取$\alpha_i\in\Lambda_i$使得P_{α_i}是x_0的序列邻域, 则$<P_{\alpha_i}>$是x_0在X中的网. 令$\beta=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Lambda_i$, 那么$\beta\in f^{-1}(x_0)$. 让$\{x_n\}$是X中收敛于$x_0$的序列. 对于每一$i\in N$, $\{x_n\}$是终于P_{α_i}的. 对于每一$n\in N$, 如果$x_n\in P_{\alpha_i}$, 定义$\alpha_{in}=\alpha_i$; 如果$x_n\notin P_{\alpha_i}$, 取定$\alpha_{in}\in\Lambda_i$使得$x_n\in P_{\alpha_{in}}$. 从而存在$n_i\in N$使得当$n>n_i$时有$\alpha_{in}=\alpha_i$, 于是在Λ_i中序列$\{\alpha_{in}\}$收敛于α_i. 对于每一$n\in N$, 置$\beta_n=(\alpha_{in})$, 那么$f(\beta_n)=x_n$且在M中序列$\{\beta_n\}$收敛于β. 故f是1序列覆盖映射. ∎

定义 3.1.8 设(X, d)是对称度量空间. X中的序列$\{x_n\}$称为d-Cauchy序列, 若对于每一$\varepsilon>0$, 存在$k\in N$使得当$m, n\geq k$时有$d(x_m, x_n)<\varepsilon$.

(1)(Alexandroff, Niemytzki[1938]) X称为Cauchy空间, 若X具有对称度量d使得X中的每一收敛序列是d-Cauchy序列.

(2)(Arhangel'skii[1965]) X称为弱Cauchy空间, 若X具有对称度量d使得X中的每一收敛序列有子序列是d-Cauchy序列.

上述术语与习惯的叙述方式有不同. 通常称Cauchy空间和弱Cauchy空间分别为满足Cauchy条件的对称度量空间和满足弱Cauchy条件是对称度量空间. 易验证, 对于对称度量空间(X, d), 若$\{x_n\}$是X的收敛序列, 那么$\{x_n\}$有子序列是d-Cauchy序列当且仅当对于每一$\varepsilon>0$, 存在子序列$\{x_{n_i}\}$使得所有的$d(x_{n_i}, x_{n_j})<\varepsilon$.

定理 3.1.9(Kofner[1969], Tanaka[1991]) 对于空间X, 下述条件相互等价:

(1) X是度量空间的商π映象.

(2) X是具有cs*覆盖的点星网的序列空间.

(3) X是弱Cauchy空间.

证明. 由定理3.1.6, 引理1.4.2和引理1.4.3知(1)$\Leftrightarrow$(2). (2)$\Rightarrow$(3). 设X是具有cs*覆盖的点星网的序列空间, 让$\{\mathcal{P}_n\}$是X的cs*覆盖的点星网, 不妨设每一$\mathcal{P}_{n+1}$加细$\mathcal{P}_n$. 由于$\mathcal{P}_n$是X的cs*覆盖, 于是对于每一$x\in X$和$n\in N$, 我们先证明$st(x, \mathcal{P}_n)$是x的序列邻域. 若不然, 则存在X

$\setminus$ st(x, $\mathcal{P}_n$)中的序列{x_m}收敛于 x. 由于 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs*覆盖, 存在子序列{x_{m_i}}是终于某一 $P\in\mathcal{P}_n$ 的, 于是 $x_{m_i}\in P\subset$ st(x, $\mathcal{P}_n$), 矛盾. 因为 X 是序列空间, 由引理 1.4.6, <st(x, $\mathcal{P}_n$)>是 x 的弱邻域网. 如引理 3.1.2, 定义 X 上的对称距离 d, 那么对于每一 $x\in X$ 和 $n\in N$ 有 st(x, $\mathcal{P}_n$)=B(x, $1/2^n$), 于是(X, d)是对称度量空间. 对于 X 中的任一收敛于 x 的序列{x_n}及 $\varepsilon>0$, 存在 $k\in N$ 使得 $1/2^k<\varepsilon$. 由于 $\mathcal{P}_k$ 是 X 的 cs*覆盖, 存在子序列{x_{n_i}}是终于 $\mathcal{P}_k$ 中的某元 P, 从而每一 d(x_{n_i}, x_{n_j})<$1/2^k<\varepsilon$, 故{x_n}有子序列是 d-Cauchy 序列, 所以 X 是弱 Cauchy 空间.

(3)$\Rightarrow$(2). 设对称度量空间(X, d)是弱 Cauchy 空间. 显然, X 是序列空间. 对于每一 $n\in N$, 置 $\mathcal{P}_n=\{A\subset X: \text{diam}A<1/n\}$, 则对于每一 $x\in X$ 有 st(x, $\mathcal{P}_n$)=B(x, 1/n), 从而{$\mathcal{P}_n$}是 X 的点星网. 对于每一 $n\in N$ 及 X 中任一收敛于 x 的序列{x_k}, 存在子序列{x_{k_i}}是 d-Cauchy 序列且所有的 d(x, x_{k_i})<1/(n+1), 于是存在 $m\in N$ 使得当 $i, j\geq m$ 时有 d(x_{k_i}, x_{k_j})<1/(n+1). 令 $A_n=\{x\}\cup\{x_{k_i}: i\geq m\}$, 那么 $A_n\in\mathcal{P}_n$, 从而 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs*覆盖. ▮

推论 3.1.10(Burke[1972]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的伪开 π 映象.

(2) X 是具有 cs*覆盖的点星网的 Fréchet 空间.

(3) X 是半度量空间.

证明. 由引理 1.4.3, 定理 3.1.9, 引理 1.4.2 和推论 1.4.8 知(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Rightarrow$(3). 为证明(3)$\Rightarrow$(2)只须证明任一半度量空间存在满足弱 Cauchy 条件的半度量. 设(X, ρ)是半度量空间. 对于 $r\in[0,\infty)$, 定义 $\mathcal{B}(r)=\{B\subset X$: 对于 B 中不同的两点 x, y 有 $\rho(x, y)\geq r\}$. 对于 $x, y\in X$, 定义

A(x, y)={$z\in X$: 存在 $B\in\mathcal{B}(\rho(x, y)/2)$使得 $x, y\in B$ 且 $z\in cl(B)$},

d(x, y)=inf{$\rho(x, z)+\rho(z, y)$: $z\in A(x, y)$}.

可以验证 d 是(X, ρ)上的半度量. 下面证明(X, d)是弱 Cauchy 空间.

设 X 中的序列{x_n}收敛于 x, 不妨设所有的 $x_n\neq x$, 为证明{x_n}存在子序列是 d-Cauchy 序列, 只须证明对于 $\varepsilon>0$, 存在{x_n}的子序列{z_n}满足: 对于每一 $n, m\in N$ 有 d(z_n, z_m)<ε. 若不然, 则存在{x_n}的子序列{y_n}使得当 $n\neq m$ 时有 d(y_n, y_m)$\geq\varepsilon$. 不妨设所有的 $\rho(x, y_n)<\varepsilon/2$.

令$\delta=\inf\{\rho(y_n, y_m): n\neq m\}$，则存在 i，$j\in N$ 使得 $0<\rho(y_i, y_j)<2\delta$， 于是$\langle y_n\rangle\subset\mathcal{B}(\rho(y_i, y_j)/2)$，从而 $x\in A(y_i, y_j)$，故$\varepsilon\leq d(y_i, y_j)\leq\rho(y_i, x)+\rho(x, y_j)<\varepsilon$，矛盾. ■

推论 3.1.11(Lee[1976], Tanaka[1991]) 对于空间 X，下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖的商π 映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的商π 映象.

(3) X 具有 g 覆盖的点星网.

(4) X 是具有 sn 覆盖的点星网的序列空间.

(5) X 是具有 cs 覆盖的点星网的序列空间.

(6) X 是 Cauchy 空间.

证明. 由引理 1.4.6，定理 3.1.7，引理 1.4.2 和引理 1.4.3 知(3)$\Leftrightarrow$(4)$\Leftrightarrow$(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(5). 类似定理 3.1.9 的(2)$\Leftrightarrow$(3)知有(5)$\Leftrightarrow$(6). ■

推论 3.1.12(Lee[1976], Heath[1965b]) 对于空间 X，下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的开π 映象.

(2) X 是度量空间的几乎开π 映象.

(3) X 是度量空间的 2 序列覆盖的商π 映象.

(4) X 是度量空间的 1 序列覆盖的伪开π 映象.

(5) X 是度量空间的序列覆盖的伪开π 映象.

(6) X 是具有 g 覆盖的点星网的 Fréchet 空间.

(7) X 是具有 cs 覆盖的点星网的 Fréchet 空间.

(8) X 是可展空间.

证明. 由定理 3.1.6，定理 2.4.15，推论 3.1.11 和引理 1.4.7 知(8)$\Rightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(1)$\Rightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(4)$\Leftrightarrow$(5)$\Leftrightarrow$(7)$\Leftrightarrow$(6)$\Rightarrow$(8). ■

上述几个定理说明了度量空间的确定π 映象是由具有特定性质的点星网所刻画的，而这些点星网的空间是一些对称度量空间类，它们之间的关系如下

$$\begin{tikzcd}
 & \text{半度量空间} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
\text{可展空间} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{弱 Cauchy 空间} \arrow[r, Rightarrow] & \text{对称度量空间.} \\
 & \text{Cauchy 空间} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

例 3.1.13 (1) 对称度量空间$\not\Rightarrow$弱 Cauchy 空间.

例如在林寿[1995]中的例 2.9.8. 取 $X=\mathbb{R}$, 令 $D=X\setminus Q$, 依下述方式定义 X 上的对称距离 ρ: 对于每一 $x, y\in X$,

$$\rho(x, y)=\begin{cases} 1, & x, y \in D且x \neq y \\ |x-y|, & 其它情况, \end{cases}$$

集合 X 赋予由 ρ 生成的对称度量拓扑. 对于每一 $x\in X, n\in N$, 有

$$B(x, 1/n)=\begin{cases} (x-1/n, x+1/n), & x\in Q \\ \{x\}\cup((x-1/n, x+1/n)\setminus D), & x\in D, \end{cases}$$

于是 X 具有下述性质

(13.1) 子空间 D 中不存在非平凡的收敛序列.

(13.2) 对于每一 $x\in Q, A\subset X$, 若 x 是 A 在 R 中关于欧氏拓扑的聚点, 那么 x 也是 A 在 X 中的聚点.

对于 X 上的任一对称度量 d, 及 $n\in N$, 置 $D_n=\{x\in D: d(x, D\setminus\{x\})\geq 1/n\}$. 若存在 $x\in D\setminus\bigcup_{n\in N}D_n$, 那么对于每一 $n\in N$, 存在 $x_n\in D\setminus\{x\}$使得 $d(x, x_n)<2/n$, 于是序列$\{x_n\}$收敛于 x, 这与(1)相矛盾. 从而 $D=\bigcup_{n\in N}D_n$. 由于 R 关于欧氏拓扑 τ 的第二范畴性质(即, 若 $R=\bigcup_{n\in N}R_n$, 则存在 $m\in N$ 使得 $\mathrm{int}_\tau(\mathrm{cl}_\tau(R_m))\neq\varnothing$), 存在 $m\in N$ 使得 $\mathrm{int}_\tau(\mathrm{cl}_\tau(D_m))\neq\varnothing$. 取 $x\in Q\cap\mathrm{cl}_\tau(D_m)$, 由于(13.2)知, $x\in Q\cap\mathrm{cl}(D_m)$, 所以 D_m不是 X 的闭子集, 于是存在 D_m 中的序列$\{y_n\}$收敛于 $y\in X\setminus D_m$, 不妨设所有的 y_n 是互不相同的, 那么对于 $n\neq k$ 有 $d(y_n, y_k)\geq 1/m$, 从而$\{y_n\}$不存在子序列是 d-Cauchy 序列. 故 X 不是弱 Cauchy 空间.

(2) 弱 Cauchy 空间 $\not\Rightarrow$ Cauchy 空间.

例如在 Tanaka[1991]中的例 2.14(3). 对于每一 $n\in N$, 设 C_n 是含有极限点 p_n 的收敛序列, 且当 $n\neq m$ 时有 $C_n\cap C_m=\varnothing$. 让 $S=\oplus_{n\in N}C_n$, $M=S\oplus R$, 则 M 是可分的局部紧度量空间. 记 $Q=\langle q_n\rangle$. 让 X 是从 M 中由贴合每一 S 中的 p_n 与 R 中的 q_n 所得到的商空间, 则正则空间 X 是 M 的商紧映象. 由定理 3.1.9, X 是弱 Cauchy 空间. 往证 X 不是 Cauchy 空间. 否则, 由推论 3.1.11, X 具有 g 覆盖的点星网$\{\mathcal{U}_n\}$. 对于每一 $n\in N$ 和 $x\in X$, 取 $U(n, x)\in\mathcal{U}_n$ 使得 $U(n, x)$是 x 在 X 中的弱邻域, 让 $G(n, x)=\bigcap_{i\leq n}U(i, x)$. 定义 $\phi: R\setminus Q\to N$ 使得若 $r\in R\setminus Q$, 那么 $r\notin\bigcup_{q\in Q}G(\phi(r), q)$.

这是可能的, 因为如果存在 $r\in R\setminus Q$ 满足对于每一 $n\in N$, 有 $s_n\in Q$ 使得 $r\in G(n, s_n)$, 取 $x_n\in(X\setminus R)\cap G(n, s_n)$, 那么 $r, x_n\in G(n, s_n)$, 于是 $x_n\in U(n, s_n)\subset st(r, \mathscr{U}_n)$, 从而序列$\{x_n\}$在 X 中收敛于 r, 矛盾, 所以满足上述条件的函数ϕ是存在的. 因为 $R\setminus Q=\bigcup_{n\in N}\{r\in R\setminus Q: \phi(r)\le n\}$, 于是存在 $m\in N$ 和 R 的欧氏开子集 U 使得关于 R 的欧氏拓扑 τ 有 $U\subset int_\tau(\{r\in R\setminus Q: \phi(r)\le m\})$. 选取 $u\in Q\cap U$, 由于 $G(m, u)\cap R$ 是 u 在 R 中的欧氏邻域, 所以存在 $r\in(U\setminus Q)\cap G(m, u)$, 这时 $\phi(r)\le m$, 故 $r\notin\bigcup_{q\in Q}G(m, q)$, 矛盾.

(3) Cauchy 空间 $\nRightarrow$ 半度量空间.

如例 1.5.1 的 Arens 空间 S_2. S_2 是可分度量空间的 1 序列覆盖的商紧映象，于是 S_2 是 Cauchy 空间, 但是 S_2 不是半度量空间.

(4) 半度量空间 $\nRightarrow$ Cauchy 空间.

例如在林寿[1995]中的例 1.8.2 的领结空间. 取 $X=R^2$, 对于 $x=(t, s)\in X$, $n\in N$, 记 $Bt(x, n)$为领结形集合$\{x\}\cup\{(t', s')\in X: 0<|t-t'|<1/n, |s-s'|/|t-t'|<1/n\}$. 以$\{Bt(x, n): n\in N\}$作为 x 在 X 中的邻域基生成 X 上的拓扑称为领结拓扑，而空间 X 称为领结空间. 这时 X 是正则空间.

(13.3) X 是半度量空间.

定义 X 上的半度量 d:

$$d((t, s), (t', s'))=\begin{cases} 0, & t=t' \text{且} s=s' \\ 1, & t=t' \text{且} s\ne s' \\ |t-t'|+|(s-s')/(t-t')|, & \text{其它}. \end{cases}$$

(13.4) X 不是 Cauchy 空间.

否则, 由推论 3.1.11 和推论 3.1.12, X 是可展空间, 于是 X 是σ空间. 由定理 1.3.5, X 具有闭网 $\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$，其中每一 $\mathscr{F}_n$ 是 X 的离散族. 对于每一 $x\in X$, 存在 $n_x\in N$ 和 $F_x\in\mathscr{F}_{n_x}$ 使得 $x\in F_x\subset Bt(x, 1)$. 由于 R^2 关于欧氏拓扑具有第二范畴性质, 存在 $m\in N$ 和 $Y\subset X$ 使得对于每一 $x\in Y$, $n_x=m$ 且 Y 在 R^2 中的某个欧氏开子集 U 中稠. 取定 $p\in U$, 置 $W=X\setminus\cup\{F\in\mathscr{F}_m: p\notin F\}$, 则 $p\in W\in\tau(X)$. 取点 $y, z\in Y\cap W\cap U$ 使得 $y\notin Bt(z, 1)$, $z\notin Bt(y, 1)$, 那么 $F_y, F_z\in\mathscr{F}_m$ 且 $F_y\ne F_z$，于是 $F_y\cap F_z=\varnothing$，从而有 $F\in\mathscr{F}_m$ 满足 $p\notin F$ 且 $F\cap W=\varnothing$，这与 W 的定义相矛盾. 故

X 不是 Cauchy 空间.

(5) 具有可数基 $\not\Rightarrow$ 对称度量空间.

例如在林寿[1995]中的例 2.7.13 的点无理扩张拓扑空间. 令 $D=R\setminus Q$, τ 是 R 的欧氏拓扑, 在 $X=R$ 上赋予点无理扩张拓扑 $\tau^*=\{\{x\}\bigcup(D\cap U): x\in U\in\tau\}$, 称$(X, \tau^*)$为点无理扩张拓扑空间 (Steen, Seebach[1978]). 易验证 X 是 T_2, 非正则, 具有可数基的空间.

我们证明 X 不是可数亚紧空间. 记 $Q=\langle r_n\rangle$, 对于每一 $n\in N$, 令 $F_n=\{r_i: i\geq n\}$. 因为 Q 是 X 的离散子集, $\{F_n\}$是 X 的递减的闭子集列且$\bigcap_{n\in N}F_n=\varnothing$. 若 X 是可数亚紧空间, 则存在 X 的开子集列$\{G_n\}$使得每一 $F_n\subset G_n$ 且 $\bigcap_{n\in N}G_n=\varnothing$. 对于每一 $n\in N$ 和 $x\in F_n$, 存在 $U(n,x)\in\tau$ 使得 $x\in U(n, x)$, $U(n, x)\cap\{r_i: i<n\}=\varnothing$ 且 $\{x\}\cup(D\cap U(n, x))\subset G_n$, 于是 $U(n, x)=(U(n, x)\cap Q)\bigcup(U(n, x)\cap D)\subset G_n$, 从而有 $O_n\in\tau$ 使得 $F_n\subset O_n\subset G_n$, 因此$\bigcap_{n\in N}O_n=\varnothing$, 这与$\tau$是 Baire 拓扑相矛盾, 所以 X 不是可数亚紧空间.

若 X 是对称度量空间, 由于 X 是第一可数空间, 则 X 是半度量空间, 从而 X 是次仿紧空间, 于是 X 是可数亚紧空间, 矛盾. 因此, X 不是对称度量空间. █

问题 3.1.14 具有 cs*覆盖点星网的空间是否是度量空间的伪序列覆盖π 映象?

问题 3.1.15(Tanaka[1987a]) 设 X 是对称度量空间. 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_2, 那么 X 是否是半度量空间?

3.2 点有限的点星网与紧映射

本节转入讨论度量空间的紧映象. 我们将看到特定的点有限覆盖的点星网与在 § 3.1 中利用点星网研究度量空间的π 映象时所起的类似作用. 先说明一些相关的点有限覆盖的点星网之间的初步关系. 设$\{\mathcal{P}_n\}$是空间 X 的点星网, 称$\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的加细, 若每一 $\mathcal{P}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{P}_n$. 若每一 $\mathcal{P}_n$ 还是 X 的点有限(或点可数, 局部有限)覆盖, 则称$\{\mathcal{P}_n\}$是 X 的点有限(或点可数, 局部有限)加细.

引理 3.2.1 对于空间 X, 考虑下述条件:

(1) X 具有点有限的 sn 覆盖的点星网.

(2) X 具有点有限的 cs 覆盖的点星网.

(3) X 具有点有限的紧有限分解的点星网.

(4) X 具有点有限的 cs*覆盖的点星网.

(5) X 具有点有限(加细)的点星 sn 网.

(6) X 具有点有限加细的点星 cs*网.

那么(1)$\Leftrightarrow$(2)$\Rightarrow$(4)$\Leftrightarrow$(5)$\Leftrightarrow$(6)$\Leftarrow$(3). 若更设 X 的紧子集是序列紧的, 则(2)$\Rightarrow$(3).

证明. 显然, (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(4), (3)$\Rightarrow$(4), (5)$\Rightarrow$(6).

(2)$\Rightarrow$(1). 只须证若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点有限 cs 覆盖, 则 $\mathcal{P}$ 的某子集是 X 的 sn 覆盖. 对于每一 $x\in X$, 记$(\mathcal{P})_x=\{P_i: i\le k\}$. 若$(\mathcal{P})_x$ 中的元均不是 x 在 X 中的序列邻域, 那么对于每一 $i\le k$, 存在 $X\setminus P_i$ 中点组成的序列$\{x_{in}\}$收敛于 x. 对于每一 $n\in N$ 和 $i\le k$, 令 $y_{i+(n-1)k}=x_{in}$, 则序列$\{y_m\}$收敛于 x, 且不终于任一 P_i, 这与 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs 覆盖相矛盾, 故存在 $\mathcal{P}$ 中的元 P_x 是 x 在 X 中的序列邻域. 记 $\mathcal{P}'=\{P_x: x\in X\}$, 则 $\mathcal{P}'$是 X 的点有限 sn 覆盖.

(4)$\Rightarrow$(5). 设空间 X 具有点有限的 cs*覆盖的点星网$\{\mathcal{P}_n\}$. 对于每一 $n\in N$ 和 $x\in X$, 令 $\mathcal{U}_n=\Lambda_{i\le n}\mathcal{P}_i$, 则 $st(x,\mathcal{U}_n)=\bigcap_{i\le n}st(x,\mathcal{P}_i)$, 由于 $st(x,\mathcal{P}_n)$是 x 的序列邻域, 于是$\{\mathcal{U}_n\}$是 X 的点有限加细的点星 sn 网.

(6)$\Rightarrow$(4). 设空间 X 具有点有限加细的点星 cs*网$\{\mathcal{P}_n\}$. 设 X 中的序列$\{x_i\}$收敛于 x, 不妨设所有的 $x_i\ne x$. 对于每一 $n\in N$ 及 $m\le n$, 若 $st(x,\mathcal{P}_m)\ne\{x\}$, 取 $z_m\in st(x,\mathcal{P}_m)\setminus\{x\}$, 于是存在 $k\in N$ 使得 $st(x,\mathcal{P}_k)\subset X\setminus\{z_m: m\le n$ 且 $st(x,\mathcal{P}_m)\ne\{x\}\}$且序列$\{x_i\}$的某一子序列$\{x_{i_j}\}$是终于 $st(x,\mathcal{P}_k)$的, 这时 k>n, 从而$\{x_{i_j}\}$是终于 $st(x,\mathcal{P}_n)$的. 由于 $\mathcal{P}_n$ 是点有限的, 所以存在$\{x_i\}$的子序列是终于 $\mathcal{P}_n$ 的某元, 故 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的 cs*覆盖.

(2)$\Rightarrow$(3). 由于(2)$\Leftrightarrow$(1), 设空间 X 具有点有限 sn 覆盖的点星网且 X 的每一紧子集是序列紧的, 则 X 具有点可数的 cs 网, 由引理 2.1.6 和推论 2.1.4, X 的每一紧子集是可度量的. 往证 X 的点有限 sn 覆盖是 X 的紧有限分解. 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的点有限 sn 覆盖, K 是 X 的非空紧子集, 对于每一 $x\in K$, 存在 $P_x\in\mathcal{P}$ 使得 P_x 是 x 在 X 中的序列邻域, 由引理 1.4.7, $x\in int_K(P_x\cap K)$, 从而存在 K 的开子集 V_x 使得 $x\in V_x\subset cl(V_x)\subset int_K(P_x\cap K)$. 这时 K 的开覆盖$\{V_x: x\in K\}$存在有限的子覆盖$\{V_{x_i}: i\le j\}$, 于是 $K=\bigcup_{i\le j}cl(V_{x_i})$且每一 $cl(V_{x_i})\subset P_{x_i}$. 让 $\mathcal{P}'=\{P_{x_i}: i\le j\}$, 则 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$,

$\mathcal{P}$'是 K 的 cfp 覆盖. 故 $\mathcal{P}$ 是 X 的紧有限分解. ▮

例 3.2.10 说明引理 3.2.1 中的一些不蕴含关系. 本节的主要目的是说明引理 3.2.1 中的空间类反映了度量空间的确定的紧映象. 关于度量空间的紧映象的相关结果有

定理 3.2.2(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]; 燕鹏飞[1997]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的伪序列覆盖(序列商, 子序列覆盖)紧映象.

(2) X 具有点有限 cs*覆盖的点星网.

(3) X 具有点有限的点星 sn 网.

(4) X 具有点有限加细的点星 cs*网.

证明. 由引理 3.2.1 知(2)$\Leftrightarrow$(3)$\Leftrightarrow$(4).

(1)$\Rightarrow$(2). 设 f:M$\to$X 是子序列覆盖的紧映射, 其中 M 是度量空间. 由定理 1.3.1, 取 M 的基 $\mathcal{B}=\bigcup_{i\in N}\mathcal{B}_i$, 其中每一 $\mathcal{B}_i$ 是 M 的局部有限开覆盖, 且对于 M 的每一紧子集 K, <st(K, $\mathcal{B}_i$)>是 K 在 M 中的邻域基. 令 $\mathcal{P}_i$=f($\mathcal{B}_i$), 则{$\mathcal{P}_i$}是 X 的点有限的覆盖列, 下面证明它是 X 的 cs*覆盖的点星网. 对于每一 x$\in$X, 设 V 是 x 在 X 中的开邻域, 由于 M 的紧子集 $f^{-1}(x)\subset f^{-1}(V)$, 则存在 n$\in$N 使得 st($f^{-1}(x)$, $\mathcal{B}_n$)$\subset f^{-1}(V)$, 因而 st(x, $\mathcal{P}_n$)$\subset$V, 故<st(x, $\mathcal{P}_i$)>是 x 在 X 中的网. 由于 f 是子序列覆盖映射, 每一 $\mathcal{P}_i$ 是 X 的 cs*覆盖, 故{$\mathcal{P}_i$}是 X 的点有限 cs*覆盖的点星网.

(3)$\Rightarrow$(1). 设 X 存在点有限的点星 sn 网{$\mathcal{P}_i$}. 对于每一 i$\in$N, 记 $\mathcal{P}_i=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda_i\}$. 让(f, M, X, $\mathcal{P}_i$)为 Ponomarev 系, 由引理 3.1.5, f:M$\to$X 是紧映射, 下面证明 f 是伪序列覆盖映射.

对于每一 x$\in$X 及 X 中收敛于 x 的序列{x_n}, 记 K=[x_n]. 对于每一 i$\in$N, 由于 st(x, $\mathcal{P}_i$)是 x 在 X 中的序列邻域, 存在 $\mathcal{P}_i'\in(\mathcal{P}_i)_K^{<\omega}$ 使得 K$\subset\cup\mathcal{P}_i'$且$(\mathcal{P}_i)_x\subset\mathcal{P}_i'$, 于是存在$\Lambda_i$的有限子集$\Gamma_i$使得 $\mathcal{P}_i'=\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma_i\}$. 对于$\alpha\in\Gamma_i$, 取

$$K_\alpha=\begin{cases}K\cap P_\alpha, & x\in P_\alpha\\(K\setminus st(x,\wp_i))\cap P_\alpha, & x\notin P_\alpha\end{cases},$$

则{$K_\alpha:\alpha\in\Gamma_i$}为紧子集族, 且 K=$\bigcup_{\alpha\in\Gamma_i}K_\alpha$, 即 $\mathcal{P}_i'$是 K 的 cfp 覆盖. 置 L=$\{(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i:\bigcap_{i\in N}K_{\alpha_i}\neq\varnothing\}$. 则

(2.1) L 是紧集$\prod_{i\in N}\Gamma_i$的闭子集, 从而 L 是$\prod_{i\in N}\Lambda_i$中的紧子集.

设$\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i\setminus L$，则$\bigcap_{i\in N}K_{\alpha_i}=\varnothing$，从而存在$i_0\in N$使得$\bigcap_{i\le i_0}K_{\alpha_i}=\varnothing$，令$W=\{(\beta_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i:$ 对于$i\le i_0$有$\beta_i=\alpha_i\ )\}$，则 W 是$\Pi_{i\in N}\Gamma_i$中含有点α的开子集且$W\cap L=\varnothing$.

(2.2) $L\subset M$且$f(L)\subset K$.

设$\alpha=(\alpha_i)\in L$，则$\bigcap_{i\in N}K_{\alpha_i}\neq\varnothing$，取$y\in\bigcap_{i\in N}K_{\alpha_i}$，则$y\in\bigcap_{i\in N}P_{\alpha_i}$，故$<P_{\alpha_i}>$是 y 在 X 中的网，所以$\alpha\in M$且$f(\alpha)=y\in K$，从而$L\subset M$且$f(L)\subset K$.

(2.3) $K\subset f(L)$.

对于任一 $y\in K$ 及 $i\in N$，取$\alpha_i\in\Gamma_i$使得 $y\in K_{\alpha_i}$，令$\alpha=(\alpha_i)$，则$\alpha\in L$ 且 $f(\alpha)=y$，因此$K\subset f(L)$.

综上所述, f 是伪序列覆盖的紧映射. █

由引理 1.4.2，引理 1.4.6 和引理 3.2.1，我们有

推论 3.2.3　对于空间 X，下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的伪序列覆盖的商紧映象.

(2) X 是度量空间的商紧映象.

(3) X 具有点有限的点星弱邻域网.

(4) X 是具有点有限的 cs*覆盖点星网的序列空间. █

定理 3.2.4(燕鹏飞[1997])　空间X 是度量空间的紧覆盖紧映象当且仅当X具有点有限的紧有限分解的点星网.

证明. 设$f:M\to X$是紧覆盖的紧映射，其中 M 是度量空间. 取 M 的基$\mathcal{B}=\bigcup_{i\in N}\mathcal{B}_i$，其中每一$\mathcal{B}_i$是 M 的局部有限开覆盖，且对于 M 的每一紧子集 K, $<st(K, cl(\mathcal{B}_i))>$是 K 在 M 中的邻域基. 令$\mathcal{C}_i=cl(\mathcal{B}_i)$, $\mathcal{P}_i=f(\mathcal{C}_i)$. 则$\{\mathcal{P}_i\}$是 X 的点有限的覆盖列. 由定理 3.2.2 所证知, $\{\mathcal{P}_i\}$是 X 的点星网. 对于 X 的任一紧子集 K，存在 M 的紧子集 L 使得 $f(L)=K$. 令$\mathcal{C}_i'=(\mathcal{C}_i)_L$, $\mathcal{P}_i'=f(\mathcal{C}_i')$，则$\mathcal{P}_i'\in\mathcal{P}_i^{<\omega}$, $\{f(C\cap L):C\in\mathcal{C}_i'\}$是 K 的紧子集组成的有限覆盖且一一加细$\mathcal{P}_i'$，即$\mathcal{P}_i$是 X 的紧有限分解. 故$\{\mathcal{P}_i\}$是 X 的点有限的紧有限分解的点星网.

反之，设$\{\mathcal{P}_i\}$是空间 X 的点有限的紧有限分解的点星网. 对于每一 $i\in N$，记 $\mathcal{P}_i=\{P_\alpha$:

$\alpha\in\Lambda_i\}$. 让(f, M, X, $\mathcal{P}_i$)为 Ponomarev 系, 由引理 3.1.5, f:M$\to$X 是紧映射. 对于 X 的任一非空紧子集 K 及 i$\in$N, 由于$\mathcal{P}_i$是 X 的紧有限分解, 存在$\mathcal{P}_i$'$\in\mathcal{P}_i^{<\omega}$使得$\mathcal{P}_i$'是 K 的 cfp 覆盖. 由定理 3.2.2 所证知, 存在 M 的紧子集 L 使得 f(L)=K, 从而 f 是紧覆盖映射. ∎

推论 3.2.5(林寿, 燕鹏飞[2001a]) 对于正则空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是可分度量空间的序列商的紧映象.

(2) X 是可分度量空间的紧覆盖的紧映象.

(3) X 具有可数的 sn 网.

证明. (2)$\Rightarrow$(1). 显然.

(1)$\Rightarrow$(3). 设 f:M$\to$X 是序列商的紧映射, 其中 M 是可分度量空间. 由定理 1.3.1, 存在 M 的可数且局部有限的开加细{$\mathcal{B}_n$}使得对于 X 的任一紧子集 K, <st(K, $\mathcal{B}_n$)>是 K 在 X 中的局部基.

对于每一 n$\in$N, 置$\mathcal{P}_n$=f($\mathcal{B}_n$). 由定理 3.2.2, {$\mathcal{P}_n$}是 X 的可数且点有限加细的 cs*覆盖的点星网, 再由引理 3.2.1, {$\mathcal{P}_n$}是 X 的点星 sn 网. 让$\mathcal{H}$={st(x, $\mathcal{P}_n$): x$\in$X, n$\in$N}, 则$\mathcal{H}$是 X 的可数 sn 网, 所以 X 具有可数 sn 网.

(3)$\Rightarrow$(2). 设$\mathcal{P}$是空间 X 的可数的 sn 网. 由 X 的正则性, 不妨设$\mathcal{P}$的每一元是 X 的闭子集. 记 $\mathcal{P}$=<P_n>=$\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$, 其中每一 $\mathcal{P}_x$是 x 在 X 中的 sn 网. 对于每一 n$\in$N, 置 Q_n={x$\in$X: $P_n\notin\mathcal{P}_x$}, $\mathcal{U}_n$={P_n, Q_n}. 则$\mathcal{U}_n$是 X 的覆盖, 且对于每一 x$\in$X 有

$$\mathrm{st}(x,\mathcal{U}_n)=\begin{cases}P_n, & P_n\in\wp_x\\ X, & P_n\notin\wp_x, x\in P_n\\ Q_n, & P_n\notin\wp_x, x\notin P_n\end{cases}.$$

从而<st(x, $\mathcal{U}_n$)>是 x 在 X 中的网. 故{$\mathcal{U}_n$}是 X 的点星网. 设 C 是 X 的紧子集, 由引理 2.1.6 和推论 2.1.4, C 是可度量的. 置 C_1=$P_n\cap$C, C_2=cl(C$\setminus P_n$). 那么 C=$C_1\cup C_2$. 如果 x$\in C_2$, 则存在C$\setminus P_n$中的序列{x_i}在C中收敛于 x, 于是$P_n\notin\mathcal{P}_x$, 从而x$\in Q_n$. 所以$C_2\subset Q_n$且$C_1\subset P_n$. 故$\mathcal{U}_n$是 X 的紧有限分解. 因而, 由定理 3.2.4 及每一$\mathcal{U}_n$的有限性, X 是可分度量空间的紧覆盖的紧映象. ∎

推论 3.2.6 对于正则空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是可分度量空间的商紧映象.

(2) X 是可分度量空间的紧覆盖的商紧映象.

(3) X 具有可数弱基. █

例 3.1.13(5)说明上述两个推论中正则性是不可省略的. 林寿, 刘川和戴牧民[1997]曾给出局部可分度量空间商紧映象的一个较复杂的内在刻画. 推论 3.2.6 涉及 Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]提出的下述问题.

问题 3.2.7(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]) 寻求局部可分度量空间的商紧映象的好的内在刻画.

定理 3.2.8(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]; 林寿, 燕鹏飞[2001b]; 燕鹏飞[1998]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖的紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的紧映象.

(3) X 具有点有限的 sn 覆盖的点星网.

(4) X 具有点有限的 cs 覆盖的点星网.

证明. 显然, (1)$\Rightarrow$(2). 由引理 3.2.1 知(3)$\Leftrightarrow$(4).

(2)$\Rightarrow$(4). 设 f:M$\to$X 是序列覆盖的紧映射, M 是度量空间. 取 M 的基 $\mathcal{B}=\bigcup_{i\in N}\mathcal{B}_i$, 其中每一 $\mathcal{B}_i$ 是 M 的局部有限开覆盖, 且对于 M 的每一紧子集 K, <st(K, $\mathcal{B}_i$)>是 K 在 M 中的邻域基. 令 $\mathcal{P}_i$=f($\mathcal{B}_i$), 则由定理 3.2.2 所证知{$\mathcal{P}_i$}是 X 的点有限的点星网. 由于 f 是序列覆盖映射, 易验证每一 $\mathcal{P}_i$ 是 X 的 cs 覆盖.

(3)$\Rightarrow$(1). 设空间 X 具有点有限的 sn 覆盖的点星网{$\mathcal{P}_i$}. 让(f, M, X, $\mathcal{P}_i$)为 Ponomarev 系, 由引理 3.1.5, f:M$\to$X 是紧映射. 由定理 3.1.7 的(3)$\Rightarrow$(1)知 f 是 1 序列覆盖映射. █

推论 3.2.9 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的紧覆盖, 1 序列覆盖的商紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖的商紧映象.

(3) X 是具有点有限 cs 覆盖的点星网的序列空间.

证明. (1)$\Rightarrow$(2)是显然的. 由定理 3.2.8 和引理 1.4.3 知(2)$\Rightarrow$(3).

(3)$\Rightarrow$(1). 设 X 是具有点有限 cs 覆盖的点星网的序列空间. 由引理 3.2.1, X 具有点有限 sn 覆盖的点星网{$\mathcal{P}_i$}. 让(f, M, X, $\mathcal{P}_i$)为 Ponomarev 系, 由定理 3.2.8, f:M$\to$X 是 1 序列覆盖的紧映射. 由引理 1.4.2, f 是商映射. 由引理 3.2.1 和定理 3.2.4, f 是紧覆盖映射. █

例 3.2.10 (1) 点有限的点星 cs*网 $\not\Rightarrow$ 点有限加细的点星 cs*网.

如例 1.5.2 的序列扇 S_ω. 如定义 1.2.10, 记序列扇 S_ω 为 $\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\in N}T_n)$, 其中每一 $T_n=<x_{nm}>$. 对于每一 $n, m\in N$, 记 $P_{nm}=\{x\}\cup\{x_{nk}: k\geq m\}$, $\mathcal{P}_{nm}=\{P_{nm}\}\cup\{\{z\}: z\in S_\omega\setminus P_{nm}\}$, 则 $\{\mathcal{P}_{nm}\}$ 是 S_ω 的点有限的点星 cs*网. 由于 S_ω 不是 snf 可数空间, 所以 S_ω 不具有点有限的点星 sn 网, 由引理 3.2.1 知, S_ω 不具有点有限加细的点星 cs*网.

(2) 点有限 sn 覆盖的点星网 $\not\Rightarrow$ 点有限的紧有限分解的点星网.

例如取 $X=\beta N$, 则 X 中不存在非平凡的收敛序列. 对于每一 $i\in N$, 让 $\mathcal{P}_i=\{\{x\}: x\in X\}$, 那么 $\{\mathcal{P}_i\}$ 是 X 的点有限的 sn 覆盖的点星网. 若 X 具有点有限的紧有限分解的点星网, 由定理 3.2.4, X 的紧子集是可度量的, 但是 βN 不是可度量的. 故 X 不具有点有限的紧有限分解的点星网.

(3) 点有限 cs*覆盖的点星网的序列空间 $\not\Rightarrow$ 点有限的紧有限分解的点星网; 如例 2.5.2 中的空间 X.

(4) 具有可数弱基的正则空间 $\not\Rightarrow$ 度量空间的序列覆盖的商紧映象; 如例 3.1.13(2)中的空间 X.

(5) 局部紧度量空间的紧覆盖的商紧映象 $\not\Rightarrow$ 具有点可数 cs 网的空间; 如例 1.5.6. ∎

问题 3.2.11(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]) 具有 σ 点有限 cs 网的对称度量空间是否是度量空间的商紧映象?

问题 3.2.12 可分度量空间的商 π 映象是否是可分度量空间的商紧映象?