2.3 序列网与商映射

商映射的引入已有 50 年的历史(Gale[1950]), 诱发的在度量空间上的商映射、商 s 映射和商紧映射等的研究是丰富多彩的(林寿[1995]). 关于度量空间的商映象有很简单的刻画(林寿[1995], 定理 2.3.6).

引理 2.3.1 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是序列空间.

(2) X 是局部紧度量空间的商映象.

(3) X 是度量空间的商映象.

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 设 X 是序列空间, 令 $\mathcal{S}$={S : S 是 X 中含极限点的收敛序列}, 则 X 的子集 E 是 X 的闭子集当且仅当对于每一 S$\in\mathcal{S}$, S$\cap$E 是 X 的闭子集. 置 M=$\oplus\mathcal{S}$, 则 M 是局部紧的度量空间. 让 f:M$\to$X 是自然映射, 则 f 是商映射.

(2)$\Rightarrow$(3)是显然的, 而由引理 1.4.3 知(3)$\Rightarrow$(1). ▌

关于度量空间确定的商映象, Arhangel'skii 提出下述问题.

问题 2.3.2 (1)(Svetlichny[1993]) 是否每一具有权数κ的序列空间是某一具有权数κ的度量空间的商映象?

(2)(Arhangel'skii[1966]) 刻画度量空间的商 s 映象.

问题(1)是 Svetlichny[1993]介绍的由 Arhangel'skii 在莫斯科拓扑学会议上提出的问题. Svetlichny[1993]利用集论公理(MA+¬ CH)否定了该问题, 即在公理(MA+¬ CH)下, 存在权数为ω_1的可数的序列空间X使得X不是任一具有权数ω_1的度量空间的商映象. 我们对这里出现的几个集合论的概念做简要的说明(Kunen[1980]). 空间 X 的权数是构成 X 的基的最小基数. ¬ CH 是否定连续统假设, 即$\omega_1<2^{\omega}$. MA 是Martin 公理, MA(κ)是断言: 若<$\mathcal{P}$, ≤>是非空的满足可数链条件的偏序集, $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{P}$ 的基数不超过κ的稠子集族, 则存在 $\mathcal{P}$ 的滤子 G 使得对于每一 D$\in\mathcal{D}$ 有 G$\cap$D$\neq\varnothing$. MA 是断言: 对于每一$\kappa<2^{\omega}$有 MA(κ)成立. 对于每一$\kappa\geq\omega$, MA(κ)等价于下述纯拓扑的命题: 若 X 是满足可数链条件的紧 T_2 空间, 并且对于每一$\alpha<\kappa$, U_α 是 X 的开稠子集, 则$\bigcap_{\alpha<\kappa}U_\alpha\neq\varnothing$.

从 Svetlichny 的例子及问题 2.3.2, 产生了如下相应的问题: 刻画具有权数κ的度量空间的商映象. Svetlichny[1993]引入了序列基(本节重新定义为序列拟基, 见定义 2.3.3)的概念, 证明了对

于任意基数κ，空间 X 是具有权数κ的度量空间的商映象当且仅当 X 是具有基数κ的序列基，给出了与问题 2.3.2(1)相关的具有确定权数的度量空间商映象的内在特征．问题 2.3.2(2)是 Arhangel'skii[1966]在名著"Mappings and spaces"中提出的, Hoshina[1970], Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]都曾给出它的解, Tanaka[1987b]用具有点可数 cs*网的序列空间给出了该问题较好的回答(即, 引理 2.1.10). 由此可见, 序列基与 cs*网的共同作用之一在于刻画度量空间确定的商映象．受此启发, 可以推测序列基与 cs*网这两个概念之间一定存在着某种必然的联系.

本节介绍序列网的概念, 建立了它与序列基、cs*网之间较为精确的关系, 证明了在一定条件下序列基与 cs*网是相互等价的, 进而获得了具有确定权数的度量空间的序列商映象以及度量空间的序列商 s 映象的内在刻画, 利用序列网的概念回答了 Arhangel'skii 提出的寻求确定权数的度量空间的商映象以及度量空间的商 s 映象的问题 2.3.2, 阐明了一些由特殊的序列网所定义的弱第一可数空间的映射特征, 深化了 Sirois-Dumais[1980]、Svetlichny[1993]和 Tanaka[1987b]的已有结果．对于空间 X 的子集族$\mathcal{P}$, 记$\mathcal{P}^{\omega}$为$\mathcal{P}$的ω次积.

定义 2.3.3(林寿[1999a]) 对于空间 X, 设 X 的子集族$\mathcal{P}$满足对于每一 $x\in X$ 存在$\mathcal{P}_x\subset\mathcal{P}^{\omega}$具有性质: 如果$(P_n)\in\mathcal{P}_x$，那么$\langle P_n\rangle$是 x 在 X 中递减的网. 简记为$\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$.

(1) $\mathcal{P}$称为 X 的序列网, 如果 $P\subset X$ 且对于任意的 $x\in P$, $(P_n)\in\mathcal{P}_x$，存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 则 P 是 X 的序列开集.

(2) $\mathcal{P}$称为 X 的序列拟基, 如果 $P\subset X$ 且对于任意的 $x\in P$, $(P_n)\in\mathcal{P}_x$，存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 则 P 是 X 的开子集.

(3) $\mathcal{P}$称为 X 的 Fréchet 拟基, 如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的$(P_n)\in\mathcal{P}_x$，存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 则 P 是 x 在 X 中的邻域.

我们之所以将满足条件(1)的集族定义为序列网是因为对于任意的空间 X, X 的收敛序列的全体组成的集族构成了 X 的网且满足条件(1). Svetlichny[1993]称序列拟基为"序列基", 由于$\mathcal{P}$的元一般不是 X 的开子集, 所以我们改称"拟基"而不用"基". Fréchet 拟基是仿照序列拟基及 Fréchet 空间的性质(即，引理 1.4.7)命名的．事实上，序列拟基与 Fréchet 拟基的概念都源于 Sirois-Dumais[1980]定义的弱拟第一可数空间与拟第一可数空间. 沿用定义 2.3.3 的记号与术语, 设$\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$，称空间 X 是弱拟第一可数的(拟第一可数的), 如果 X 具有序列拟基(Fréchet 拟

基)$\mathcal{P}$使得每一$\mathcal{P}_x$是可数的. 在本节中我们将看到定义这两类空间的目的是作为第一可数空间的推广把它们表示为度量空间确定的商映象.

我们先建立 2.3.3 中定义的几个概念之间的简单联系. 显然, 对于空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ 是 X 的第一可数基$\Rightarrow\mathcal{P}$是 X 的 Fréchet 拟基$\Rightarrow\mathcal{P}$是 X 的序列拟基$\Rightarrow\mathcal{P}$是 X 的序列网.

引理 2.3.4 对于空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$. 设 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$, 那么 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网当且仅当如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的$(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

证明. 只须证必要性. 设 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是空间 X 的序列网. 如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的$(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 往证 P 是 x 在 X 中的序列邻域. 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 假设存在$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_i}\}$使得所有的 $x_{n_i}\notin P$. 让 $G=X\setminus\langle x_{n_i}\rangle$, 易验证, 对于任意的 $z\in G$, $(P_n)\in\mathcal{P}_z$, 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset G$, 于是 G 是 X 的序列开集, 这与$\{x_{n_i}\}$收敛于 $x\in G$ 相矛盾. 因此, P 含有序列$\{x_n\}$的子序列, 从而 P 是 x 的序列邻域. █

引理 2.3.5 (1) 空间 X 是序列空间当且仅当 X 具有序列拟基.

(2) 空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 具有 Fréchet 拟基.

证明. 设 X 是序列(Fréchet)空间, 让 $\mathcal{P}$ 是 X 的所有收敛序列组成的集族, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列(Fréchet)拟基. 反之, 设 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是 X 的序列(Fréchet)拟基. 如果 X 的子集 P 是 X 的序列开集且 $x\in P$(x 在 X 中的序列邻域), 对于任意的$(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 若存在 X 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in P_n\setminus P$, 因为$\langle P_n\rangle$是 x 在 X 中递减的网, 所以序列$\{x_n\}$收敛于 x, 这与 P 是 x 的序列邻域相矛盾, 因而存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 于是 P 是 X 的开子集(x 在 X 中的邻域), 由定义 1.2.4(引理 1.4.7), X 是序列(Fréchet)空间. █

推论 2.3.6 (1) $\mathcal{P}$ 是空间 X 的序列拟基当且仅当 X 是序列空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

(2) $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 Fréchet 拟基当且仅当 X 是 Fréchet 空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网. █

其次, 我们着重讨论序列网与 cs*网之间较为精细的联系. 先介绍下述 Köing 引理, 它的证明出现在 Kodama, Nagami[1974].

引理 2.3.7(Köing 引理) 设$\{X_i\}$是非空的有限集列. 若对于每一 n<m, 存在对应

π_n^m:$X_m \to X_n$ 满足每一$\pi_n^m = \pi_n^k \circ \pi_k^m$，则存在$(x_i) \in \prod_{i\in N} X_i$ 使得每一$\pi_n^m(x_m) = x_n$.

证明. 每一集合 X_i 都赋予离散拓扑，则 X_i 是紧空间．置 $X = \prod_{i\in N} X_i$，$Y = \{(x_i) \in X$: $\pi_n^m(x_m) = x_n$，n<m}，则 Y 是 X 的闭子集．事实上，对于 $y=(y_i) \in X \setminus Y$，存在 n<m 使得 $\pi_n^m(y_m) \neq y_n$，令 $V = \{(x_i) \in X : x_n = y_n, x_m = y_m\}$，则 V 是 X 中包含点 y 的开子集且 $V \cap Y = \varnothing$，故 Y 是 X 的闭子集. 为完成引理的证明，只须说明 $Y \neq \varnothing$．对于每一 $m \in N$，令 $Y_m = \{(x_i) \in X$: 若 n<m，则$\pi_n^m(x_m) = x_n\}$，于是 Y_m 是 X 的非空闭子集，从而$\{Y_m\}$是 X 的单调递减的闭子集列. 因为 X 是紧空间，所以 $Y = \bigcap_{m\in N} Y_m \neq \varnothing$，故存在$(x_i) \in \prod_{i\in N} X_i$ 使得每一$\pi_n^m(x_m) = x_n$. █

定理 2.3.8(林寿[1999a]) (1) 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的序列网，则 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网.

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs*网，则 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

证明. (1) 让 $\mathcal{P} \approx \bigcup_{x\in X} \mathcal{P}_x$ 是空间 X 的序列网. 设 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x 且 G 是 x 在 X 中的开邻域，因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的网，不妨设所有的 $x_n \neq x$. 置 $H = G \setminus \langle x_n \rangle$，则 H 不是 x 在 X 中的序列邻域. 由引理 2.3.4，存在$(P_n) \in \mathcal{P}_x$ 使得对于任意的 $n \in N$ 有 $P_n \not\subset H$，并且存在 $m_0 \in N$ 使得 $P_{m_0} \subset G$. 对于每一 $k \geq m_0$，记 $T_k = P_k \cap \langle x_n \rangle$，那么 $T_k \neq \varnothing$．若有 $k_0 \geq m_0$使得 T_{k_0} 是有限集，则存在 $m_1 > k_0$ 使得 $P_{m_1} \subset X \setminus T_{k_0}$，于是 $T_{m_1} = \varnothing$，矛盾．从而当 $k \geq m_0$时，T_k 为无限集．因此，P_{m_0} 含有$\{x_n\}$的子序列且 $P_{m_0} \subset G$，故 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网.

(2) 设 $\mathcal{P}$是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs*网．对于每一 $x \in X$，置 $\mathcal{P}_x = \{(P_n) \in \mathcal{P}^\omega$: $\langle P_n \rangle$是 x 在 X 中递减的网}，则 $\mathcal{P}_x \neq \varnothing$．设 $x \in P \subset X$，如果对于任意的$(P_n) \in \mathcal{P}_x$，存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$，往证 P 是 x 在 X 中的序列邻域．设 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x，不妨设所有的 $x_n \neq x$，则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列$\{\mathcal{P}_n\}$满足条件引理 1.3.7 的条件(2)~(4). 记 $\mathcal{P}_n' = \{P' \in \mathcal{P}_n$: P'含有$\{x_n\}$的子序列}，那么$\mathcal{P}_n'$ 非空且$\mathcal{P}_{n+1}'$ 加细 $\mathcal{P}_n'$．由引理2.3.7，利用加细所产生的函数，对于每一 $n \in N$ 存在 $P_n \in \mathcal{P}_n'$ 使得 $P_{n+1} \subset P_n$．这时 $x \in P_n$，从而$(P_n) \in \mathcal{P}_x$，于是存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$. 故 P 含有$\{x_n\}$的子序列，所以 P 是 x 的序列邻域．由引理 2.3.4，$\mathcal{P}$ 是 X 的序列网. █

定理 2.3.8 引出的问题是: 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 cs*网, 那么 $\mathcal{P}$ 是否是 X 的序列网? 下面说明该问题的回答是否定的.

定理 2.3.9(林寿[1999a]) 空间 X 是第一可数空间当且仅当若 $\mathcal{P}$ 是 X 的关于有限交封闭的 cs*网, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

证明. 设 X 是第一可数空间, $\mathcal{P}$ 是 X 的关于有限交封闭的 cs*网. 对于每一 $x\in X$, 设 x 在 X 中递减的可数局部基为 $\langle V_{x,n}\rangle$. 置

$$\mathcal{P}_x=\{(P_n)\in\mathcal{P}^{\omega}:x\in P_{n+1}\subset P_n\subset V_{x,n}\}.$$

则 $\mathcal{P}_x\neq\varnothing$ 且对于任意的 $(P_n)\in\mathcal{P}_x$, $\langle P_n\rangle$ 是 x 在 X 中递减的网, 往证 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是 X 的序列网. 如果 $x\in P\subset X$ 且对于任意的 $(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 不妨设所有的 $x_n\neq x$. 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网, 存在 $G_1\in\mathcal{P}$ 和 $\langle x_n\rangle$ 的无限子集 Z_1 使得 $cl(Z_1)\subset G_1\subset V_{x,1}$, 于是又存在 $G_2\in\mathcal{P}$ 和 Z_1 的无限子集 Z_2 使得 $cl(Z_2)\subset G_2\subset V_{x,2}$,…. 因此, 我们可以归纳地构造 $\langle x_n\rangle$ 的无限子集列 $\{Z_n\}$ 以及 $(G_n)\in\mathcal{P}^{\omega}$ 使得对于每一 $n\in N$ 有 $cl(Z_{n+1})\subset cl(Z_n)\subset G_n\subset V_{x,n}$. 令 $P_n=\bigcap_{i\le n}G_i$, 则 $(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 那么存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 从而 $cl(Z_m)\subset P$, 所以 P 是 x 在 X 中的序列邻域. 由引理 2.3.4, $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

反之, 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的基, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网, 于是 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网. 由定义 2.3.3, X 的每一点具有可数的局部基, 所以 X 是第一可数空间. ▮

设 X 是任意的非第一可数的空间, 那么 X 的拓扑是 X 的 cs*网, 由定理 2.3.9, X 的拓扑不是 X 的序列网.

本节的最后一部分利用上面获得的序列网的性质给出度量空间的确定商映象一些新刻画, 特 别地, 刻画了度量空间的序列商映象以及度量空间的序列商 s 映象.

引理 2.3.10 设 $f:X\to Y$ 是序列商映射. 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的序列网, 则 $f(\mathcal{P})$ 是空间 Y 的序列网.

证明. 设 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$. 对于每一 $y\in Y$, 记 $\mathcal{H}_y=\{(f(P_n)):(P_n)\in\mathcal{P}_x,\ x\in f^{-1}(y)\}$, 则 $\mathcal{H}_y\in f(\mathcal{P})^{\omega}$. 由于 f 的连续性, 如果 $\langle P_n\rangle$ 是 x 在 X 中递减的网, 则 $\langle f(P_n)\rangle$ 是 f(x)在 Y 中递减的网. 设 $H\subset Y$ 且对于任意的 $y\in H$, $(H_n)\in\mathcal{H}_y$, 存在 $m\in N$ 使得 $H_m\subset H$, 那么对于任意的 $x\in f^{-1}(H)$, $(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 有 $f(x)\in H$ 且 $(f(P_n))\in\mathcal{H}_{f(x)}$, 所以存在 $m\in N$ 使得 $f(P_m)\subset H$, 于是

$P_m \subset f^{-1}(H)$, 因而 $f^{-1}(H)$是 X 的序列开集. 因为 f 是序列商映射, 由引理 1.4.1, H 是 Y 的序列开集. 故 $f(\mathcal{P})$是 Y 的序列网. ▮

定理 2.3.11(林寿[1999a]) 对于任意基数κ及任意空间X, X具有基数κ的序列网当且仅当X是具有权数κ的度量空间的序列商映象.

证明. 由引理 2.3.10, 只须证必要性. 不妨设$\kappa \geq \omega$. 设$\mathcal{P} \approx \bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$是空间 X 的基数为$\kappa$的序列网. 对于每一$x\in X$, 记$\mathcal{H}_x=\{(H_n)\in\mathcal{P}^{\omega}$: 存在$(P_n)\in\mathcal{P}_x$和$i\in N$使得当$n\geq i$时有$H_n=P_n$且$x\in\bigcap_{n<i}H_n\}$. 再记$\mathcal{P}=\{P_\alpha$: $\alpha\in\Lambda\}$. 对于每一 $n\in N$, 让Λ_n是集合Λ赋予离散拓扑的空间. 定义

$M=\{\beta=(\alpha_n)\in\prod_{n\in N}\Lambda_n$: 存在$x(\beta)\in X$使得$(P_{\alpha_n})\in\mathcal{H}_{x(\beta)}\}$.

则M是权数不超过κ的度量空间, 并且对于每一$\beta\in M$, $x(\beta)$是唯一确定的, 于是可以定义函数$f:M\to X$使得$f(\beta)=x(\beta)$. 显然, f是满函数. 设P是X的开子集并且$f((\alpha_n))\in P$, 那么存在$m\in N$使得 $P_{\alpha_m}\subset P$. 置 $W=\{\beta\in M$: β的第 m 个坐标是$\alpha_m\}$. 则 W 是 M 的开子集, $(\alpha_n)\in W$ 且$f(W)\subset P_{\alpha_m}\subset P$, 于是 f 是连续函数. 如果 $P\subset X$ 且 $f^{-1}(P)$是 M 的序列开集, 对于任意的 $x\in P$, $(P_{\alpha_n})\in\mathcal{P}_x$, 有$(\alpha_n)\in f^{-1}(P)$. 因为 $f^{-1}(P)$是 M 的开子集, 存在$\prod_{n\in N}\Lambda_n$的基本开集$\prod_{n\in N}\Gamma_n$使得$(\alpha_n)\in M\cap\prod_{n\in N}\Gamma_n\subset f^{-1}(P)$. 不妨设当$n\leq m$时$\Gamma_n=\{\alpha_n\}$, 当$n>m$时$\Gamma_n=\Lambda_n$. 对于$y\in P_{\alpha_m}$, 取定$(P_{\gamma_n})\in\mathcal{P}_y$, 定义$\gamma=(\tilde{\gamma}_n)\in\prod_{n\in N}\Lambda_n$使得当$n\leq m$时$\tilde{\gamma}_n=\alpha_n$, 当$n>m$时$\tilde{\gamma}_n=\gamma_n$, 那么$(P_{\tilde{\gamma}_n})\in\mathcal{H}_y$, 从而$\gamma\in M\cap\prod_{n\in N}\Gamma_n$, 于是$y=f(\gamma)$, 故$P_{\alpha_m}\subset f(M\cap\prod_{n\in N}\Gamma_n)\subset P$, 所以 P 是 X 的序列开集. 由引理 1.4.1, f 是序列商映射.

以上我们证明了 X是权数不超过κ的度量空间M的序列商映象, 从而X也是与M同胚的κ个空间的拓扑和的序列商映象, 故 X 是权数κ的度量空间的序列商映象. ▮

由推论 2.3.6 和引理 1.4.2, 我们有

推论 2.3.12(Svetlichny[1993]) 对于任意基数κ及任意空间X, X具有基数κ的序列拟基当且仅当 X 是具有权数κ的度量空间的商映象. ▮

由定理 2.3.8 及引理 2.1.10, 我们可以利用序列网给出问题 2.3.2(2)的另一个解.

定理 2.3.13(林寿[1999a]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有点可数的序列网.

(2) X 具有点可数的 cs*网.

(3) X 是度量空间的序列商 s 映象. █

推论 2.3.14 (1) 空间 X 具有点可数的序列拟基当且仅当 X 是度量空间的商 s 映象.

(2) 空间 X 具有点可数的 Fréchet 拟基当且仅当 X 是度量空间的伪开 s 映象. █

下面继续用度量空间确定的序列商映象刻画与序列网相关的弱第一可数性.

定义 2.3.15(Svetlichny[1993]) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的序列网. $\mathcal{P}$ 的扇数定义为 $\min\{\lambda$: $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$, 对于每一 $x\in X$ 有$|\mathcal{P}_x|\le\lambda$ }. 记 $\mathcal{P}$ 的扇数为 fn($\mathcal{P}$).

空间 X 是弱拟第一可数的(拟第一可数的)(Sirois-Dumais[1980]), 如果 X 具有序列拟基(Fréchet 拟基)$\mathcal{P}$ 使得 fn($\mathcal{P}$)$\le\omega$.

由定义 2.3.15 知, 空间 X 是 snf 可数空间当且仅当 X 具有序列网 $\mathcal{P}$ 使得 fn($\mathcal{P}$)=1, 空间 X 是 gf 可数空间当且仅当 X 具有序列拟基 $\mathcal{P}$ 使得 fn($\mathcal{P}$)=1. 由例 1.5.1 和例 1.5.2 易验证, 序列扇 S_ω 是非 snf 的似第一可数空间, 扇空间 S_{ω_1} 是非弱拟第一可数的 Fréchet 空间, Arens 空间 S_2 是非拟第一可数的 gf 可数空间.

定理 2.3.16(Svetlichny[1993]) 对于任意基数 λ 和空间 X, X 具有扇数不超过 λ 的序列网当且仅当存在度量空间 M 和序列商映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le\lambda$.

证明. 设 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是空间 X 的序列网使得每一$|\mathcal{P}_x|\le\lambda$. 对于每一 $x\in X$ 和$(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 让 $M_{x,(P_n)}$ 是集合 X 赋予如下拓扑: 以$\langle P_n\rangle$作为 x 的邻域基, X╲{x}的点取为 X 的孤立点. 那么 $M_{x,(P_n)}$ 是具有 σ 离散基的正则空间, 于是 $M_{x,(P_n)}$ 是可度量空间. 定义 $M=\oplus\{M_{x,(P_n)}$: $x\in X$, $(P_n)\in\mathcal{P}_x\}$, 则 M 是可度量空间. 让 $f:M\to X$ 是自然映射.

(16.1) f 是连续的. 对于 X 的开子集 U 和 $x\in X$, $(P_n)\in\mathcal{P}_x$. 由于$\langle P_n\rangle$是 x 在 X 中的网, $f^{-1}(U)\cap M_{x,(P_n)}$ 是 M 的开子集, 于是 $f^{-1}(U)$是 M 的开子集, 所以 f 是连续函数.

(16.2) f 是序列商映射. 设 $P\subset X$ 且 $f^{-1}(P)$是 M 的序列开集, 对于任意的 $x\in P$ 和$(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 由于 $f^{-1}(P)\cap M_{x,(P_n)}$ 是 M的开子集, 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 于是 P 是 X 的序列开集. 由引理 1.4.1, f 是序列商映射.

(16.3) 对于每一 $x\in X$, $|\partial f^{-1}(x)|\le\lambda$. 由 M 的定义知$|\partial f^{-1}(x)|\le|\mathcal{P}_x|\le\lambda$.

反之，设存在度量空间 M 和序列商映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le\lambda$. 对于每一 $x\in X$ 和 $z\in f^{-1}(x)$, 让$<B_n(z)>$是 z 在 M 中递减的局部基. 若 $\partial f^{-1}(x)\ne\varnothing$，记 $\mathcal{P}_x=\{(f(B_n(z))): z\in\partial f^{-1}(x)\}$；若$\partial f^{-1}(x)=\varnothing$，取定 $z\in f^{-1}(x)$，记 $\mathcal{P}_x=\{(f(B_n(z)))\}$. 与引理 2.3.10 类似，易验证 $\mathcal{P}\approx\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 是 X 的序列网且 $fn(\mathcal{P})\le\lambda$. ∎

由推论 2.3.6 和引理 1.4.2，我们有下述弱第一可数空间的映射刻画.

推论 2.3.17 (1) X 是弱拟第一可数空间当且仅当存在度量空间 M 和商映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le\omega$.

(2) X 是拟第一可数空间当且仅当存在度量空间 M 和伪开映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le\omega$.

(3) X 是 snf 可数空间当且仅当存在度量空间 M 和序列商映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le 1$.

(4) X 是 gf 可数空间当且仅当存在度量空间 M 和商映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le 1$. ∎

问题 2.3.18 设空间 X 具有点可数弱基，是否存在度量空间 M 和商 s 映射 $f:M\to X$ 使得每一$|\partial f^{-1}(x)|\le 1$?

2.4 cs 网、sn 网与序列覆盖映射

空间的集族性质与适当的映射类是相互匹配的，如点可数集族对应 s 映射，cs*网对应序列商映射. 引理 2.1.10 就是这种匹配的范例. 本节介绍几类与 cs 网相关的空间与度量空间上序列覆盖映射匹配的结果. 1971 年 Guthrie[1971]为刻画$\aleph_0$空间引入了 cs 网的概念，1971 年 Siwiec[1971]定义了序列覆盖映射获得了序列空间和 Fréchet 空间的函数形式特征. 1972 年 Strong[1972]证明了具有可数 cs 网的空间可以刻画为可分度量空间的序列覆盖映象. 而对于具有点可数弱基的空间, Hoshina[1970]在研究度量空间的商 s 映象的特征时曾试图解决下述问题.

问题 2.4.1 具有点可数弱基的空间可刻画为度量空间在怎样的映射下的象?

这些结果与问题激发了对于序列覆盖映射的进一步探讨及 1 序列覆盖映射与 2 序列覆盖映射的引入(Ikeda, 刘川, Tanaka[2002]; 林寿[1996c]; 林寿, 刘川[1996]; 林寿, 燕鹏飞[2001a, 2001b];

刘川, Tanaka[1998a]; Tanaka[1991]; Tanaka, 夏省祥[1996]; 夏省祥[2000]). 本节介绍度量空间的序列覆盖(或 1 序列覆盖, 2 序列覆盖)映象和 s 映象的特征, 特别地, 利用 1 序列覆盖的商 s 映射回答了问题 2.4.1, 建立了序列覆盖映射与开映射的一些初步关系.

与问题 2.2.12 相关, 对于 cs 网、sn 网和 so 网相应的问题有肯定的回答.

定理 2.4.2 每一正则空间是具有点可数 so 网的完全正则空间的完备映象.

Woods[1979]应用布尔代数中的 Stone 空间理论证明了每一正则空间是某一极不连通(extremally disconnected)空间的完备映象, 而极不连通空间是具有点可数 so 网的完全正则空间(Gleason[1958]), 于是定理 2.4.2 是 Woods 定理的推论. 这里我们给出将空间加强为完全正则空间时 Tanaka 的简单证明.

证明. 设 X 是完全正则空间. 让 D 是集合 X 赋予离散拓扑的空间, f: $D\to\beta X$ 是嵌入映射, $h=\beta f$: $\beta D\to\beta X$ 是 f 的唯一扩张, 则 h 是完备映射. 让 $E=\{z\in\beta D : h(z)\in X\}$, $g=h_{|E} : E\to X$, 则 E 是完全正则空间且 g 是完备映射. 由于βD中不存在非平凡的收敛序列, 所以 E 中也不存在非平凡的收敛序列, 令$\mathcal{P}=\{\{z\} : z\in E\}$, 则$\mathcal{P}$是 E 的点可数 so 网, 于是 X 是具有点可数 so 网的完全正则空间的完备映象. ▌

由此, 完备映射不保持具有点可数 cs 网的空间.

定理 2.4.3(林寿[1996b]) 空间 X 是度量空间的序列覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 cs 网.

证明. 设存在度量空间 M 和序列覆盖 s 映射 f:$M\to X$. 让$\mathcal{B}$是 M 的σ局部有限基, 那么$\{f(B) : B\in\mathcal{B}\}$是空间 X 的点可数 cs 网.

反之, 设空间 X 具有点可数 cs 网$\mathcal{P}$. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$. 让(f, M, X, $\mathcal{P}$)为 Ponomarev 系, 由引理 1.3.8, f:$M\to X$ 是 s 映射. 我们要证明 f 是序列覆盖映射. 对于 X 中收敛于点 x_0的序列$\{x_n\}$, 不妨设所有 x_n是互不相同的. 让 $K=[x_n]$, 并且设 U 是 X 中任一包含 K 的开子集, 称$\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$具有性质 F(K, U), 如果$\mathcal{F}$满足

(3.1) 对于每一 $P\in\mathcal{F}$, 有$\varnothing\neq P\cap K\subset P\subset U$.

(3.2) 对于每一 $z\in K$, 存在唯一的 $P_z\in\mathcal{F}$使得 $z\in P_z$.

(3.3) 若 $x_0\in P\in\mathcal{F}$, 那么 $K\setminus P$ 是有限的.

由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs 网，具有性质 F(K, U)的 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 是存在的. 置{$\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{\omega}$ ：$\mathcal{F}$ 具有性质 F(K, X)}=<$\mathcal{F}_i$ >. 对于每一 $i\in N$ 和 $m\in\omega$，存在唯一的 $\alpha_{im}\in\Lambda$ 使得 $x_m\in P_{\alpha_{im}}\in\mathcal{F}_i$. 让 $\beta_m=(\alpha_{im})\in\Lambda^{\omega}$，则

(3.4) f(β_m)=x_m.

(3.5) $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta_0$.

事实上, 设 V 是 x_m 在 X 中的开邻域. 如果 m=0, 令 L=K∩V, 那么存在 $\mathcal{F}'\in\mathcal{P}^{\omega}$ 具有性质 F(L, V), 而 K＼L 是有限集, 可以取定 $\mathcal{P}$ 的基数为|K＼L|的子集族 $\mathcal{F}''$满足: 对于每一 z∈K＼L, 存在唯一的 P∈$\mathcal{F}''$使得 z∈P⊂X＼L. 置 $\mathcal{F}=\mathcal{F}'\cup\mathcal{F}''$, 则 $\mathcal{F}$ 具有性质 F(K, X), 于是存在 i∈N 使得 $\mathcal{F}=\mathcal{F}_i$，从而 $x_0\in P_{\alpha_{i0}}\subset\cup\mathcal{F}'$, 因此 $x_0\in P_{\alpha_{i0}}\subset V$. 如果 m>0, 则存在 $\mathcal{F}^*\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 具有性质 F(K＼{x_m}, X＼{x_m})和 P∈$\mathcal{P}$ 使得 $x_m\in P\subset V$＼(K＼{x_m}), 那么{P}∪$\mathcal{F}^*$具有性质 F(K, X), 于是存在 j∈N 使得 $\mathcal{F}_j$={P}∪$\mathcal{F}^*$, 从而 $x_m\in P_{\alpha_{jm}}$=P⊂V. 故{$P_{\alpha_{im}}$ ：i∈N}是 x_m 在 X 中的网, 所以 $\beta_m\in M$ 且 f(β_m)=x_m. (3.5)等价于对于每一 i∈N 在 Λ 中有 $\lim_{n\to\infty}\alpha_{in}=\alpha_{i0}$ 由于{α_{in} ：n∈N}是有限集, 从(3.2)和(3.3)知, 存在 $n_i\in N$ 使得当 $n\ge n_i$ 时有 $\alpha_{in}=\alpha_{i0}$，所以 $\lim_{n\to\infty}\alpha_{in}=\alpha_{i0}$，故 $\lim_{n\to\infty}\beta_n=\beta_0$.

这表明 f 是序列覆盖 s 映射. ∎

由引理 1.4.2 和引理 1.4.3, 我们可将 Strong[1972]关于可数 cs 网的结果推广为点可数 cs 网的情形.

推论 2.4.4 空间 X 是度量空间的序列覆盖的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数 cs 网的序列空间. ∎

下面转入回答问题 2.4.1.

引理 2.4.5 设 f:X→Y. 如果<B_n >是 X 中某点 x 的递减的网且每一 f(B_n)是 f(x)在 Y 中的序列邻域. 若在 Y 中序列{y_n}收敛于 f(x), 那么存在 $x_n\in f^{-1}(y_n)$使得在 X 中序列{x_n}收敛于 x.

证明. 对于每一 n∈N, 由于 f(B_n)是 f(x)的序列邻域, 存在 $i_n\in N$ 使得当 $i\ge i_n$ 时有 $y_i\in f(B_n)$, 那么 $f^{-1}(y_i)\cap B_n\ne\emptyset$. 不妨设 $1<i_n<i_{n+1}$. 对于 j∈N, 置

$$x_j \in \begin{cases} f^{-1}(y_j), j < i(1), \\ f^{-1}(y_j) \cap B_n, i_n \le j < i_{n+1}, n \in N, \end{cases}$$

那么 $x_j \in f^{-1}(y_j)$, 且在 X 中序列$\{x_j\}$收敛于 x. █

定理 2.4.6(林寿[1996c]) 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 sn 网.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数 sn 网. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. 让$(f, M, X, \mathcal{P})$为 Ponomarev 系, 由引理 1.3.8, $f:M \to X$ 是 s 映射, 往证 f 是 1 序列覆盖映射. 对于每一 $x \in X$, 设 $\mathcal{P}$ 的子集族$\langle P_{\alpha_i} \rangle$是 x 在 X 中的序列邻域网, 记 $\beta=(\alpha_i) \in \Lambda^\omega$, 那么 $\beta \in f^{-1}(x)$. 对于每一 $n \in N$, 置 $B_n=\{(\gamma_i) \in M:$ 对于 $i \le n$ 有$\gamma_i=\alpha_i\}$, 那么$\langle B_n \rangle$是β在 M 中递减的邻域基, 且 $f(B_n)=\bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i}$. 事实上, 设$\gamma=(\gamma_i) \in B_n$, 那么 $f(\gamma) \in \bigcap_{i \in N} P_{\gamma_i} \subset \bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i}$, 所以 $f(B_n) \subset \bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i}$. 再设 $z \in \bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i}$, 选取 $\mathcal{P}$ 的子集族$\langle P_{\delta_i} \rangle$使得$\langle P_{\delta_i} \rangle$是点 z 在 X 中的网且当 $i \le n$ 时有$\delta_i=\alpha_i$, 令$\delta=(\delta_i) \in \Lambda^\omega$, 那么 $z=f(\delta) \in f(B_n)$, 于是$\bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i} \subset f(B_n)$, 故 $f(B_n)=\bigcap_{i \le n} P_{\alpha_i}$. 现在, 设 X 中的序列$\{x_j\}$收敛于 x, 由于 $f(B_n)$是 x 的序列邻域, 再由引理 2.4.5, 存在$\beta_j \in f^{-1}(x_j)$使得在 M 中序列$\{\beta_j\}$收敛于β, 从而 f 是 1 序列覆盖映射.

反之, 设 M 是度量空间且 $f:M \to X$ 是 1 序列覆盖的 s 映射, 让$\mathcal{B}$是 M 的σ 局部有限基. 对于每一 $x \in X$, 存在$\beta_x \in f^{-1}(x)$满足定义 1.2.3(6)中 1 序列覆盖映射的条件. 置 $\mathcal{P}_x=\{f(B) : \beta_x \in B \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{P}=\bigcup_{x \in X} \mathcal{P}_x$, 则可直接验证$\mathcal{P}$是 X 的点可数 sn 网. █

由引理 1.4.2, 引理 1.4.3 和引理 1.4.6, 我们有下述推论, 它回答了问题 2.4.1.

推论 2.4.7 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商 s 映象当且仅当 X 具有点可数弱基. █

对于度量空间的 2 序列覆盖 s 映象的特征, 我们需要下述引理.

引理 2.4.8 设 $f:X \to Y$, 考虑下述条件:

(1) f 是 2 序列覆盖映射.

(2) 对于 $x \in P \subset X$, 若 P 是 x 的序列邻域, 那么 f(P)是 f(x)的序列邻域.

(3) 若 P 是 X 的序列开集, 那么 f(P)是 Y 的序列开集.

则(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3). 若 X 是第一可数空间, 则(3)$\Rightarrow$(1).

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 对于 $x\in P\subset X$, 若 P 是 x 的序列邻域, 设 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 f(x), 由(1), 存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$, 于是$\{x_n\}$是终于 P 的, 从而$\{y_n\}$是终于 f(P)的. 故 f(P)是 f(x)的序列邻域.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 P 是 X 的序列开集, 对于每一 $y\in f(P)$, 存在 $x\in P$ 使得 f(x)=y, 由(2), f(P)是 y 的序列邻域, 于是 f(P)是 Y 的序列开集.

设 X 是第一可数空间, 由条件(3), 引理 2.4.5 及定义 1.2.3(7)知(3)$\Rightarrow$(1). ∎

沿用定理 2.4.6 和推论 2.4.7 的证明方法, 利用引理 2.4.8 有

定理 2.4.9(林寿[1996c]) (1) 空间 X 是度量空间的 2 序列覆盖 s 映象当且仅当 X 具有点可数的 so 网.

(2) 空间 X 是度量空间的 2 序列覆盖的商 s 映象当且仅当 X 具有点可数基. ∎

我们对于度量空间的 1 序列覆盖(或 2 序列覆盖)的 s 映象有了较好的刻画, 那么度量空间的 1 序列覆盖(或 2 序列覆盖)映象又有怎样的内在特征?

下述引理可直接验证.

引理 2.4.10 设 $f:X\rightarrow Y$, $g:Y\rightarrow Z$ 都是 1 序列覆盖(或 2 序列覆盖)映射, 那么 $gf:X\rightarrow Z$ 也是 1 序列覆盖(或 2 序列覆盖)映射. ∎

定理 2.4.11(林寿, 燕鹏飞[2001b]) 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖(或 2 序列覆盖)映象当且仅当 X 是 snf 可数(或 sof 可数)空间.

证明. 仅证 1 序列覆盖映射的情形, 2 序列覆盖映射的情形是类似的.

设 $f:M\rightarrow X$ 是 1 序列覆盖映射, 其中 M 是度量空间. 对于每一 $x\in X$, 存在 $\beta_x\in f^{-1}(x)$满足定义 1.2.3(6). 让$\mathcal{B}_x$是 β_x 在 M 中的可数局部基, 令$\mathcal{P}_x=f(\mathcal{B}_x)$, 则$\mathcal{P}_x$是 x 在 X 中的可数 sn 网. 故 X 是 snf 可数空间.

反之, 设 X 是 snf 可数空间, 让$\mathcal{P}$是使得 X 是 snf 可数空间的 X 的 sn 网. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 让$(f, M, X, \mathcal{P})$为 Ponomarev 系, 由引理 1.3.8, $f:M\rightarrow X$ 是映射, 从定理 2.4.6 的证明知 f 是 1 序列覆盖映射. ∎

由引理 1.4.6, 引理 1.4.2, 引理 1.4.3 和定理 2.4.11 有

推论 2.4.12 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖(2 序列覆盖)的商映象当且仅当 X 是 gf 可数(第一可数)空间. ∎

推论 2.4.13 (1) 1 序列覆盖映射保持 snf 可数空间.

(2) 1 序列覆盖的商映射保持 gf 可数空间.

(3) 2 序列覆盖映射保持 sof 可数空间.

(4) 2 序列覆盖的商映射保持第一可数空间. ▮

注记 2.4.14 从定理 2.4.11, 认为"空间 X 是度量空间的序列覆盖映象当且仅当 X 是 csf 可数空间"是很自然的. 但这是不正确的. 一方面, 任何空间都是某一度量空间的序列覆盖映象. 事实上, 设 X 是一空间, 让 M=$\oplus${S : S 是 X 的含极限点的收敛序列}, 则 M 是度量空间且从 M 到 X 上的自然映射是序列覆盖映射. 另一方面, 由于扇空间 S_{ω_1} 恰有一个非孤立点, 若 S_{ω_1} 在非孤立点处具有可数 cs 网, 那么 S_{ω_1} 自身就具有点可数 cs 网, 但由例 1.5.2, S_{ω_1} 不具有点可数 cs 网, 所以 S_{ω_1} 不是 csf 可数空间.

从定义 1.2.3 可见, 序列覆盖映射、1 序列覆盖映射及 2 序列覆盖映射都具有一种所谓的收敛序列的"拉回"性质, 而开映射具有收敛序列的"拉回"性质早已为人们所重视并发挥了积极的作用. 1935 年 Eilenberg[1935]证明了下述性质: 设 f:X$\rightarrow$Y 是开映射, X 和 Y 是紧度量空间, 那么 f 是开映射当且仅当如果在 Y 中序列{y_n}收敛于 y, 则在超空间 2^X 中序列{$f^{-1}(y_n)$}收敛于点 $f^{-1}(y)$(Nadler[1992], 定理 13.5]). Nadler[1992]的著作表明 Eilenberg 的定理被应用于连续统的分解结构. 1971 年 Siwiec[1971]叙述了第一可数空间上的开映射是序列覆盖映射. 1991 年恽自求[1991]实际上证明了具有点 G_δ 性质的正则空间上的开闭映射是序列覆盖映射, 并由此导出开闭映射保持正则的$\aleph$ 空间性质. 本节的最后一个定理将进一步揭示开映射, 几乎开映射与 2 序列覆盖, 1 序列覆盖映射的关系.

定理 2.4.15(林寿[2000a]) 设 f:X$\rightarrow$Y. 若 X 是第一可数空间, 那么

(1) f 是开映射当且仅当 f 是 2 序列覆盖的商映射.

(2) f 是几乎开映射当且仅当 f 是 1 序列覆盖的伪开映射.

证明. (1)是引理 2.4.8 的推论. 我们证明(2)成立. 设 f 是几乎开映射. 显然, f 是伪开映射. 对于每一 y$\in$Y 及 x$\in f^{-1}$(y)满足定义 1.2.2(6)的要求. 由于 X 是第一可数空间, 让<B_n>是 x 在 X 中递减的局部基, 那么<f(B_n)>是 y 在 Y 中递减的邻域基. 由引理 2.4.5, 如果 Y 中的序列{y_n}收敛于 y, 那么存在 X 中收敛于 x 的序列{x_n}使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$, 所以 f 是 1 序列覆盖映射.

反之，设 f 是 1 序列覆盖的伪开映射. 对于每一 $y\in Y$，存在 $x\in f^{-1}(y)$满足定义 1.2.3(6)的要求. 如果 U 是 x 在 X 中的邻域，我们要证明 f(U)是 y 在 Y 中的邻域. 对于 Y 中收敛于 y 的序列$\{y_n\}$，存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$，于是序列$\{x_n\}$是终于 U 的，从而序列$\{y_n\}$是终于 f(U)的，因此 f(U)是 y 的序列邻域. 由于 X 是第一可数空间，所以 Y 是 Fréchet 空间，由引理 1.4.7, f(U)是 y 的邻域，于是 f 是几乎开映射. █

问题 2.4.16(Tanaka[1993]) 开映射是否保持 gf 可数空间?

2.5 cfp 网与紧覆盖映射

Michael 和 Nagami[1973]对于度量空间的紧覆盖映射进行了系统的研究，证明了空间 X 是度量空间的开 s 映象当且仅当 X 是度量空间的紧覆盖的开 s 映象，提出了下述问题

问题 2.5.1 度量空间的商 s 映象是否也是度量空间的紧覆盖的商 s 映象?

从文献陈怀鹏[1999]; Debs, Raymond[1996, 1999]; Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]; Just, Wicke[1994]; 林寿[1998a]; Michael[1990]可见，问题 2.5.1 诱导了紧覆盖映射、序列覆盖映射、诱导完备映射等映射理论，点可数覆盖理论，集论拓扑等课题的发展，现已成为一般拓扑学的著名问题而激发很多有趣的工作. Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]证明了度量空间的商 s 映象是度量空间的伪序列覆盖的商 s 映象(推论 1.3.9). 陈怀鹏[1999]否定地回答了问题 2.5.1.

例 2.5.2(陈怀鹏[1999]) 存在局部可分度量空间的商紧映象 X 使得 X 不是任一度量空间的紧覆盖的商 s 映象.

让 $Q'=I\cap Q$, $R_1\cup R_2=I\setminus Q'$使得 $R_1\cap R_2=\varnothing$ 且 R_i (i=1,2)在 I 中是 c 稠密的. 令 $M_1=(R_1\times\{1, 1/2, 1/3, \ldots\})\cup((R_1\cup R_2)\times\{0\})$赋予$I^2$ 的子空间拓扑. 对于每一$r\in R_2$，令 $S_r=\{r\}\times\{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$, $M_2=\oplus\{S_r\cup\{(r, 0)\} : r\in R_2\}$，那么 M_2 是局部紧的度量空间. 令 $M_3=\oplus\{I\times\{1/n\} : n\in N\}$，则 M_3也是局部紧的度量空间. 再令 $M=M_1\oplus M_2\oplus M_3$，则 M 是局部可分的度量空间. 让$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$ 是 M 的σ 局部有限基且满足

(2.1) 如果 $B\in\mathscr{B}$，则存在 $k\in\{1, 2, 3\}$使得 $B\subset M_k$.

(2.2) 如果 $B\subset M_2$，则存在 $r\in R_2$ 使得 $B\subset S_r\cup\{(r, 0)\}$.

(2.3) 如果 $B\subset M_3$, 则存在 $n\in N$ 使得 $B\subset I\times\{1/n\}$.

置集合 $X=I^2\setminus(Q'\times\{0\})$. 让 $g:M\to X$ 是显然映射, $\mathcal{P}=g(\mathcal{B})$. 定义 X 的拓扑如下: $U\subset X$ 是 X 的开子集当且仅当对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $P\cap U$ 是 P 的开子集, 即 X 关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑. 这时, X 是非正则的 T_2 空间, X 是局部可分度量空间 M 的商紧映象, 但是 X 不是任一度量空间的紧覆盖的商 s 映象. $\blacksquare$

既然度量空间的商 s 映象未必是度量空间的紧覆盖的商 s 映象, 寻求度量空间的紧覆盖的商 s 映象的内在刻画具有特别的意义. 这比度量空间的商 s 映象的内在刻画要复杂和困难的多. 1977 年 Michael[1977]证明了具有点可数闭 k 网的 k 空间是度量空间的紧覆盖的商 s 映象; 1996 年林寿[1996b]证明了具有点可数 cs 网的序列空间是度量空间的紧覆盖的商 s 映象; 1996 年刘川和戴牧民[1996]引入强 k 网的概念(定义 2.5.3(2)), 给出了度量空间的紧覆盖的商 s 映象第一个刻画: 空间 X 是度量空间的紧覆盖的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数强 k 网的 k 空间. 但强 k 网因形式较为复杂难以进一步发挥作用, 而上述列举的闭 k 网或 cs 网的条件又都严格强于度量空间的紧覆盖的商 s 映象中所需要的集族性质, 所以用弱于闭 k 网和 cs 网且较为简单的概念来代替强 k 网条件应是回答上述问题的方向之一. 为此, 燕鹏飞和林寿[1999b]引入了 cfp 网的概念作为闭 k 网、cs 网和强 k 网的深化, 证明了一个空间是度量空间的紧覆盖 s 映象当且仅当它是具有点可数的 cfp 网的空间, 这不仅仅给出了度量空间的紧覆盖的商 s 映象一个较为简单的内在刻画, 同时可导出关于度量空间的 s 映象研究方面的系列结论. 本节介绍这方面的一些结果.

定义 2.5.3(燕鹏飞[1997]) 设 K 是空间 X 的子集. 若 $\mathcal{F}$ 是 K 在 X 中的有限覆盖且被 K 的紧子集组成的有限覆盖一一加细, 则称 $\mathcal{F}$ 是 K 的 cfp 覆盖.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1)(燕鹏飞[1997]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的紧有限分解, 若对于 X 中的每个紧子集 K, 存在 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $\mathcal{P}'$ 是 K 的 cfp 覆盖.

(2)(刘川, 戴牧民[1996]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的强 k 网, 若对于 X 中的每个紧子集 K, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子族 $\mathcal{P}(K)$满足: 对于 K 的任意紧子集 L 及 X 中包含 L 的开子集 V, 存在 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}(K)^{<\omega}$ 使得 $\mathcal{P}'$ 是 L 的 cfp 覆盖且 $\cup\mathcal{P}'\subset V$.

(3)(燕鹏飞, 林寿[1999b]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的紧有限分解网, 若对于 X 中的每个紧子集 K 及包含 K 的开子集 V, 存在 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $\mathcal{P}'$ 是 K 的 cfp 覆盖且 $\cup\mathcal{P}'\subset V$.

空间 X 的紧有限分解网简记为 X 的 cfp 网.

上述一系列概念的出发点是紧有限分解. 这是燕鹏飞[1997]为获得度量空间的紧覆盖紧映象而引入的. 显然, 空间的闭 k 网或强 k 网都是 cfp 网, cfp 网是 cs*网和 k 网. 为进一步说明它们之间的关系, 下述关于点可数覆盖的 cfp 性质与著名的 Miščenko 引理(引理 1.3.6)类似. 对于空间 X 的子集 H 及 H 的 cfp 覆盖 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ 称为 H 的极小 cfp 覆盖, 若对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $\mathcal{P}\setminus\{P\}$不是 H 的 cfp 覆盖.

引理 2.5.4(燕鹏飞, 林寿[1999b]) 如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数覆盖, 那么 X 的每一非空紧子集仅有至多可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的极小 cfp 覆盖.

证明. 设 K 是空间 X 的非空紧子集且$\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$是由 $\mathcal{P}$ 的元组成 K 的极小 cfp 覆盖全体. 若引理不成立, 则存在 $n\in N$ 使得集族 $\mathcal{R}=\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda, |\mathcal{P}_\alpha|=n\}$是不可数的. 对于 $P\in\mathcal{P}$, 令 $\mathcal{R}(P)=\{\mathcal{P}_\alpha : P\in\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}\}$. 取 $x_1\in K$, 则 $\mathcal{R}=\cup\{\mathcal{R}(P) : x_1\in P\in\mathcal{P}\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是点可数的, 于是存在 $P_1\in\mathcal{P}$ 使得 $x_1\in P_1$且满足$|\mathcal{R}(P_1)|>\omega$. 若 n=1, 则$|\mathcal{R}(P_1)|=1$, 矛盾, 故 n>1. 设 $\mathcal{R}(P_1)=\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda_1\}$, 其中每一$\mathcal{P}_\alpha=\{P_{\alpha i} : i\leq n\}$被 K 的紧子集组成的有限覆盖 $\mathcal{F}_\alpha=\{F_{\alpha i} : i\leq n\}$一一加细且 $P_{\alpha 1}=P_1$. 我们先证明$\{\bigcup_{2\leq i\leq n}F_{\alpha i} : \alpha\in\Lambda_1\}$具有有限交性质. 任取$\{\mathcal{F}_\alpha : \alpha\in\Lambda_1\}$的有限子族$\{\mathcal{F}_{\beta_j} : j\leq m\}$, 则有$\bigcup_{j\leq m}F_{\beta_j 1}\subset P_1$, 由于 $\mathcal{P}_{\beta_j}$ 是 K 的极小 cfp 覆盖, 因而存在 $x\in K\setminus\bigcup_{j\leq m}F_{\beta_j 1}$, 故 $x\in\bigcap_{j\leq m}(\bigcup_{2\leq i\leq n}F_{\beta_j i})$, 所以集族$\{\bigcup_{2\leq i\leq n}F_{\alpha i} : \alpha\in\Lambda_1\}$具有有限交性质, 于是它具有非空的交. 取 $x_2\in\bigcap_{\alpha\in\Lambda_1}(\bigcup_{2\leq i\leq n}F_{\alpha i})$. 令 $\mathcal{R}(P_1, P)=\{\mathcal{P}_\alpha : P\in\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}(P_1)\}$, 则 $\mathcal{R}(P_1)=\cup\{\mathcal{R}(P_1, P) : x_2\in P\in\mathcal{P}\}$. 事实上, 任取 $\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}(P_1)$, 由于 $x_2\in\bigcup_{2\leq i\leq n}F_{\alpha i}$, 存在 $1\leq i_0\leq n$ 使得 $x_2\in F_{\alpha i_0}\subset P_{\alpha i_0}$, $P_{\alpha i_0}\neq P_1$且 $\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}(P_1, P_{\alpha i_0})$. 因此, 存在 $P_2\in\mathcal{P}$ 使得 $x_2\in P_2$, $P_2\neq P_1$ 且$|\mathcal{R}(P_1, P_2)|>\omega$. 重复上述过程, 可得到点集$\{x_i\}_{i\leq n}$及集族$\{P_i\}_{i\leq n}$满足: 每一 $x_i\in P_i\in\mathcal{P}$, 当 $i\neq j$ 时 $P_i\neq P_j$ 且$|\mathcal{R}(P_1, P_2,\ldots, P_n)|>\omega$, 但是$|\mathcal{R}(P_1, P_2,\ldots, P_n)|=1$, 矛盾. 故, 由 $\mathcal{P}$ 的元组成 K 的极小 cfp 覆盖至多是可数的. ∎

下面几个引理说明了 cfp 网与 cs 网、强 k 网的关系.

引理 2.5.5 若空间 X 的每一紧子集是序列紧的, 则 X 的点可数 cs 网也是 X 的 cfp 网.

证明. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 cs 网, K 是 X 的紧子集, V 是 X 中包含 K 的开子集. 由引理

2.1.6 和推论 2.1.4, K 是第一可数的. 对于每一 $x\in K$, 设$\langle V_n\rangle$是 x 在 K 中递减的局部基. 置$\mathcal{F}=\{P\cap K: P\in\mathcal{P}, P\subset V$ 并且存在 $n\in N$ 使得 $V_n\subset P\cap K\}$, 那么$\mathcal{F}$是 x 在 K 中的邻域族. 由推论 2.1.12(1)所证, $\mathcal{F}$是 x 在 K 中的网, 从而$\mathcal{F}$是 x 在 K 中的邻域基, 于是存在 $F\in\mathcal{F}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_K(F)$, 即存在 $P_x\in\mathcal{P}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_K(P_x\cap K)\subset P_x\subset V$, 因此存在 K 的开子集 V_x 使得 $x\in V_x\subset \mathrm{cl}(V_x)\subset \mathrm{int}_K(P_x\cap K)$. 这时 K 的开覆盖$\{V_x: x\in K\}$存在有限的子覆盖$\{V_{x_i}: i\le n\}$, 于是 $K=\bigcup_{i\le n}\mathrm{cl}(V_{x_i})$且每一 $\mathrm{cl}(V_{x_i})\subset P_{x_i}$. 让$\mathcal{P}'=\{P_{x_i}: i\le n\}$, 则$\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$, $\mathcal{P}'$是 K 的 cfp 覆盖且$\cup\mathcal{P}'\subset V$, 故$\mathcal{P}$是 X 的 cfp 网. ■

引理 2.5.6 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数覆盖, 若$\mathcal{P}$是 X 的 cfp 网, 则$\mathcal{P}$也是 X 的强 k 网.

证明. 设 K 是 X 的非空紧子集. 由引理 2.5.4, 记由$\mathcal{P}$的元组成 K 的极小 cfp 覆盖族为$\mathcal{F}=<\mathcal{P}_i>$, 令$\mathcal{P}(K)=\cup\mathcal{F}$, 则$\mathcal{P}(K)$是$\mathcal{P}$的可数子族. 对于 K 的任意非空紧子集 L 及 X 中包含 L 的开子集 V, 存在 L 在 K 中的开邻域 W 使得 $\mathrm{cl}_K(W)\subset V$, 于是存在$\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得$\mathcal{P}'$是 $\mathrm{cl}_K(W)$的 cfp 覆盖且$\cup\mathcal{P}'\subset V$. 由于紧集 $K\setminus W\subset X\setminus L$, 又存在$\mathcal{P}''\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得$\mathcal{P}''$是 $K\setminus W$ 的 cfp 覆盖且$\cup\mathcal{P}''\subset X\setminus L$. 令$\mathcal{P}^*=\mathcal{P}'\cup\mathcal{P}''$, 则$\mathcal{P}^*$是 K 的 cfp 覆盖, 从而存在 $k\in N$ 使得$\mathcal{P}_k\subset\mathcal{P}^*$. 设$\mathcal{P}_k=\{P_i: i\le n\}$被 K 的紧子集组成的有限覆盖$\{F_i: i\le n\}$一一加细, 让$\mathcal{R}=\{P_i\in\mathcal{P}_k: F_i\cap L\neq\varnothing\}$, 那么$\mathcal{R}$是 L 的 cfp 覆盖且$\cup\mathcal{R}\subset V$, 所以$\mathcal{P}$是 X 的强 k 网. ■

引理 2.5.7(燕鹏飞, 林寿[1999b]) 具有点可数 cfp 网的空间是度量空间的紧覆盖 s 映象.

证明. 设$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数 cfp 网. 记$\mathcal{P}=\{P_\alpha: \alpha\in\Lambda\}$. 让$(f, M, X, \mathcal{P})$为 Ponomarev 系, 由引理 1.3.8, $f:M\to X$ 是 s 映射, 下面证明 f 是紧覆盖映射.

设 K 的 X 的非空紧子集. 由引理 2.5.4, 记由$\mathcal{P}$的元组成 K 的极小 cfp 覆盖族为$\mathcal{F}=<\mathcal{P}_i>$, 其中每一$\mathcal{P}_i=\{P_\alpha: \alpha\in\Gamma_i\}$被 K 的紧子集组成的有限覆盖$\mathcal{F}_i=\{F_\alpha: \alpha\in\Gamma_i\}$一一加细. 置 $L=\{(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i: \bigcap_{i\in N}F_{\alpha_i}\neq\varnothing\}$. 那么

(7.1) L 是紧子集$\prod_{i\in N}\Gamma_i$的闭子集, 从而 L 是Λ^ω的紧子集.

设$\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}\Gamma_i\setminus L$, 则$\bigcap_{i\in N}F_{\alpha_i}=\varnothing$, 从而存在$i_0\in N$ 使得$\bigcap_{i\le i_0}F_{\alpha_i}=\varnothing$, 令

W={$(\beta_i) \in \prod_{i\in N}\Gamma_i$: 对于$i \le i_0$有$\beta_i = \alpha_i$}, 则 W 是$\Pi_{i\in N}\Gamma_i$中含有点α的开子集且 W∩L=∅.

(7.2) L⊂M 且 f(L)⊂K.

设α=(α_i)∈L. 取定 x∈$\bigcap_{i\in N}$ F_{α_i}, 如果我们证明了<P_{α_i}>是 x 在 X 中的网, 那么α∈M 且 f(α)=x∈K, 于是有 L⊂M 且 f(L)⊂K. 设 V 是 x 在 X 中的开邻域, 则存在 x 在 K 中的开邻域 W 使得 cl_K(W)⊂V, 于是存在 $\mathcal{P}$'∈$\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $\mathcal{P}$'是 cl_K(W)的 cfp 覆盖且∪$\mathcal{P}$'⊂V. 由于紧集 K\W⊂X\{x}, 又存在 $\mathcal{P}$"∈$\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得$\mathcal{P}$"是 K\W的 cfp 覆盖且∪$\mathcal{P}$"⊂X\{x}. 令 $\mathcal{P}$*=$\mathcal{P}$'∪$\mathcal{P}$", 则 $\mathcal{P}$*是 K 的 cfp 覆盖, 于是存在 k∈N 使得 $\mathcal{P}_k$ ⊂$\mathcal{P}$*. 因为 x∈F_{α_k} ⊂P_{α_k} ∈$\mathcal{P}_k$, 所以 P_{α_k} ∈$\mathcal{P}$', 故 P_{α_k} ⊂V, 从而<P_{α_i}>是 x 在 X 中的网.

(7.3) K⊂f(L).

设 x∈K, 对于每一 i∈N, 存在$\alpha_i \in \Gamma_i$使得 x∈F_{α_i}, 令α=(α_i), 则α∈L 且由(7.2)所证知 f(α)=x, 因此 K⊂f(L).

综上所述, f 是紧覆盖 s 映射. ▌

由于闭 k 网是 cfp 网, 所以有

推论 2.5.8(Michael[1977]) 若 X 是具有点可数闭 k 网的空间(k 空间), 则 X 是度量空间的紧覆盖(商)s 映象. ▌

推论 2.5.9(林寿[1996b]) 空间 X 是度量空间的紧覆盖, 序列覆盖的 s 映象当且仅当 X 具有点可数 cs 网且 X 的每一紧子集是可度量的.

证明. 必要性由定理 2.4.3, 而充分性由引理 2.5.5, 引理 2.5.7 和定理 2.4.3. ▌

定理 2.5.10(燕鹏飞, 林寿[1999b]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的紧覆盖 s 映象.

(2) X 具有点可数的 cfp 网.

(3) X 具有点可数的强 k 网.

证明. 由引理 2.5.6 和引理 2.5.7 知(3)⇔(2)⇒(1). 设空间 X 是度量空间 M 在紧覆盖 s 映射 f 下的象. 让 $\mathcal{P}$ 是 M 的σ局部有限基, 则 $\mathcal{P}$ 是 M 的 cfp 网. 由于 f 是紧覆盖的 s 映射, 于是 f($\mathcal{P}$)是空间 X 的点可数的 cfp 网. 故(1)⇒(2). ▌

推论 2.5.11 (1)(燕鹏飞, 林寿[1999b]) 空间 X 是度量空间的紧覆盖的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数的 cfp 网的 k 空间.

(2)(林寿[1996b]) 空间 X 是度量空间的紧覆盖, 序列覆盖的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数 cs 网的序列空间.

证明. 由定理 2.5.10, 引理 1.4.3 和引理 1.4.2 可得到(1). 由引理 2.1.6 和引理 2.1.4, 具有点可数cs网的序列空间的每一紧子集是可度量的, 所以由推论2.5.9, 引理1.4.3和引理1.4.2 可得到(2).

■

从例 2.5.2 知, 具有点可数cs*网的序列空间严格地弱于具有点可数cfp网的k空间. 于是, 具有点可数的 cfp 网的 k 空间就是度量空间的紧覆盖的商 s 映象的实质的内在特征, 而类“具有点可数 cs 网的序列空间”是含有度量空间的紧覆盖的商 s 映象的较好的空间类.

问题 2.5.12 (1) 具有紧可数 cs*网的序列空间是否具有点可数的 cfp 网?

(2) 是否存在具有点可数 cs*网的正则空间 X 使得 X 不具有点可数的 cfp 网?

本章主要介绍点可数覆盖与度量空间 s 映象之间的关系, 最重要的技巧是利用 Ponomarev 系. 现将点可数覆盖与序列覆盖 s 映射的一些主要关系总结如下.

定理 2.5.13 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数网, (f, M, X, $\mathcal{P}$)为 Ponomarev 系, 则 f 是 s 映射.

(1) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs*网, 则 f 是伪序列覆盖映射和序列商映射(引理 1.3.8).

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs 网, 则 f 是序列覆盖映射(定理 2.4.3).

(3) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 sn 网, 则 f 是 1 序列覆盖映射(定理 2.4.6).

(4) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 so 网, 则 f 是 2 序列覆盖映射(定理 2.4.9).

(5) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cfp 网, 则 f 是紧覆盖映射(引理 2.5.7). ■