第二章　关于点可数覆盖

早在 20 世纪 20 年代 Alexandroff 和 Urysohn(Arhangel'skii[1997]; Arhangel'skii, Tikhomirnov[1998])就证明了如果正则空间 X 具有由可分度量空间组成的点可数开覆盖，则 X 是度量空间．1960 年 Ponomarev[1960]用度量空间的开 s 映象刻画了具有点可数基的空间，为 Alexandroff 的空间分类思想奠定了基础，伴随着亚 Lindelöf 等覆盖性质的进一步深入探索(Burke[1984])，引导了一批一般拓扑学工作者对于空间中点可数集族的浓厚兴趣．对于由点可数覆盖所确定的广义度量空间理论较为系统研究的 3 篇重要论文是 1976 年 Burke 和 Michael[1976]的"On certain point-countable covers"，1984 年 Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]的"Spaces determined by point-countable covers"以及 1987 年 Tanaka[1987b]的"Point-countable covers and k-networks"．Tanaka[1989]的论文是关于点可数覆盖与度量空间 s 映象的第一篇较详细的综述报告(含有完整的证明)．这些论文的大部分结果已写入林寿[1995]的《广义度量空间与映射》．现在，点可数覆盖理论的研究依然是拓扑学中较活跃的课题之一，包含函数空间(Dow, Junnila, Pelant[1997])、拓扑群(Arhangel'skii[1998])和广义序空间(刘川, Sakai, Tanaka[2002])等在内的具有确定的点可数覆盖空间的度量化问题依然吸引着一些一般拓扑学名家的关注(Arhangel'skii[1997]; 林寿，燕鹏飞[1998])．

本章将围绕具有点可数 k 网的空间、具有点可数序列网的空间、具有点可数 cs*网的空间、具有点可数 cs 网的空间与具有点可数 cfp 网的空间中的一些与度量空间的 s 映象相关的问题阐述点可数覆盖的理论．我们应用 Miščenko[1962]和 Ponomarev[1960]处理点可数覆盖与度量空间开 s 映象的技巧，发挥 Franklin[1967]定义的序列闭包拓扑"既有稳定的收敛序列又可回避空间对弱第一可数性的要求"这一优点，介绍了 Arhangel'skii、Hoshina、Michael、Nagami、刘川和 Tanaka 等提出的几个问题(见问题 2.1.1，问题 2.2.1，问题 2.3.2，问题 2.4.1 和问题 2.5.1)的解决情况与研究进展，初步建立了度量空间的序列覆盖 s 映射与紧覆盖 s 映射的研究框架．

2.1　wcs*网与基

在由点可数覆盖所确定的广义度量空间类中，具有点可数 k 网的空间所具有的魅力仅次于具有点可数基的空间．研究 M 空间的度量化(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984])、度量空间的 s 映象(Tanaka[1987b])与完备逆象(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984])、乘积空间的弱第一可数性(Nogura, Shibakov[1995]; Shibakov[1995a]; Tanaka[1997]), CW 复形(刘川, Tanaka[1996c]; Tanaka[1992a])、

函数空间(McCoy, Ntantu[1988])、广义序空间(刘川, Sakai, Tanaka[2002])、具广义度量条件的拓扑群的度量化(刘川，Sakai，Tanaka[2002]；Shibakov[1998a])及具有点可数基空间的性质(林寿，Tanaka[1994])等均与具有点可数 k 网的空间有关. 由此可见，具有点可数 k 网的空间是较典型的广义度量空间类(Tanaka[1999]).

具有点可数k网空间研究的主旋律之一是它与由点可数覆盖确定的空间之间的转化，适当的弱第一可数性是一个合适的媒介. 刘川和 Tanaka 提出

问题 2.1.1 (1)(刘川, Tanaka[1998b]; Tanaka[1994]) 若具有点可数k网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω，那么 X 是否具有点可数基?

(2)(Tanaka[1987a]) 若度量空间的商 s 映象 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω，那么 X 是否具有点可数基?

(3)(Tanaka[1994]) 若具有点可数 cs 网的序列空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω，那么 X 是否具有点可数弱基?

(4)(刘川, Tanaka[1996a]) 若具有 σ 点有限 k 网的 k 空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω，那么 X 是否是 gf 可数空间?

问题 2.1.1 的实质是在具有点可数 k 网的空间中 S_2，S_ω 与弱第一可数性的关系. 1977 年 Franklin 和 Thomas[1977b]证明了具有可度量“块”的 k_ω 空间是可度量空间当且仅当它不含有子空间同胚于 S_2 和 S_ω; 1983 年 Tanaka[1983]证明了局部可分度量空间的正则的商 s 映象是可度量空间当且仅当它不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω；1987 年 Tanaka[1987a]证明了在假设(CH)下度量空间的正则的商紧映象具有点可数基当且仅当它不含有闭子空间同胚于 S_2 (CH 表示连续统假设，即 $\omega_1 = 2^\omega$)；1994 年刘川和戴牧民[1994]证明了对于具有点可数闭 k 网的正则的 k 空间 X，若 X 具有点 G_δ 性质且不含有闭子空间同胚于 S_ω，则 X 是 gf 可数空间；1995 年 Nogura 和 Shibakov[1995]证明了对于具有点可数k网的 Fréchet 空间 X，若 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω，则 X 是第一可数空间. 受这些工作的引导，本节侧重于介绍在具有点可数覆盖空间中如何建立 S_2，S_ω 与弱第一可数性的精确关系，深化了已有的一系列结果，解决了 2.1.1 中的全部问题.

先引进几个概念与记号. 与 k 网和 cs*网相关的概念是下述的 wcs*网和条件(A)和(B). 对于空间 X 的子集族 $\mathcal{F}$ 和 $A\subset X$, $\mathcal{F}$ 称为 A 的序列邻域, 如果 $A\subset \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})$, 由引理 1.4.10, 即 $\cup\mathcal{F}$ 是 A 中每一点在 X 中的序列邻域.

定义 2.1.2 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1)(林寿, Tanaka[1994]) $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网, 如果 $\{x_n\}$ 是 X 中收敛于 x 的序列且 $x\in U\in\tau$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 和 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得 $\langle x_{n_i}\rangle\subset P\subset U$.

(2)(燕鹏飞, 林寿[1999a]) 称 $\mathcal{P}$ 具有(A), 如果 $x\in U\in\tau$, 则存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})\subset\cup\mathcal{F}\subset U$.

(3)(燕鹏飞, 林寿[1999a]) 称 $\mathcal{P}$ 具有(B), 如果 $x\in U\in\tau$, 则存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})\subset\cup\mathcal{F}\subset U$, 且 $x\in\cap\mathcal{F}$.

术语 wcs*网的更早描述是在 Tanaka[1987b]中记为条件(C_2). 而条件(A)和(B)的引入源于如下的 Burke-Michael[1976]条件: X 有点可数覆盖 $\mathcal{P}$ 使得如果 $x\in U\in\tau$, 则存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 有 $x\in \mathrm{int}(\cup\mathcal{F})\subset\cup\mathcal{F}\subset U$ 且 $x\in\cap\mathcal{F}$. 1969 年 Filippov[1969]通过极其复杂的构造证明了"可数双商 s 映射保持具有点可数基的空间", 1972 年 Burke 和 Michael[1972]却以另一种方式较容易地证明了"可数双商 s 映射保持具有点可数基的空间". 其精彩与重要之处在于 Burke 和 Michael 借助上述的点可数覆盖性质获得了点可数基空间的一个等价刻画, 利用点可数基空间在可数双商 s 映射下的象空间具有这种点可数覆盖性质得到了 Filippov 定理的优美证明. 虽然 Burke-Michael 条件放低了对于空间中点可数覆盖中元素开集条件的要求, 但在讨论映射定理时若缺少了空间中适当的弱第一可数条件, 要达到 Burke-Michael 条件中有限并的开邻域性质也是有困难的. 另一方面, Burke-Michael 条件中的集族性质与问题 2.1.1 中的集族性质"k 网"或"cs*网"都蕴含了"wcs*网"这一集族性质. 本节旨在发展 wcs*网的理论, 试图利用更一般的"序列邻域"来代替 Burke-Michael 条件中的"开邻域"条件, 获得了这种新条件与备受关注的 wcs*网之间的精确联系, 同时借助 Nogura 和 Shibakov[1995]的正则化技巧(定义 1.4.14)减弱了空间对于正则分离性的要求, 将过去已获得的在点可数覆盖方向上关于弱基、cs 网、k 网和 cs*网等的一些重要结果统一到 wcs*网上, 肯定地回答了 2.1.1 中的所有问题.

易验证, 对于空间 X 的覆盖,

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{sn 网} & \Rightarrow & \text{(B)} & \Rightarrow & \text{(A)} & & \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
\text{cs 网} & \Rightarrow & \text{cs*网} & \Rightarrow & \text{wcs*网} & \Leftarrow & \text{k 网},
\end{array}
$$

X 是 snf 可数空间 $\Rightarrow$ X 是 α_4 空间 $\Leftrightarrow$ σ X 是 α_4 空间 $\Rightarrow$ σ X 不含有闭子空间同胚于 S_ω $\Rightarrow$ X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

为了说明上述覆盖的进一步关系，我们先证明一个与著名的 Miščenko 引理(引理 1.3.6)类似的有趣结果. 对于空间 X 的子集 H 和 H 的序列邻域 $\mathcal{P}$, 称 $\mathcal{P}$ 是 H 的极小序列邻域, 若对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $H\not\subset \mathrm{int}_s(\cup(\mathcal{P}\setminus\{P\}))$.

引理 2.1.3(燕鹏飞, 林寿[1999a]) 如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数覆盖, 那么 X 的每一非空子集仅有至多可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的有限的极小序列邻域.

证明. 对于每一 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$，让 $\mathcal{H}(\mathcal{F})=\{H\subset X: \mathcal{F}$ 是 H 的极小序列邻域$\}$. 设 H 是 X 的非空子集, 如果存在不可数个 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $H\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$, 则存在 $m\in N$ 和 $\mathcal{P}^{<\omega}$ 的不可数子集 Λ 使得对于每一 $\mathcal{F}\in\Lambda$ 有 $|\mathcal{F}|=m$ 且 $H\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$.

设 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{P}$ 的满足对于不可数个 $\mathcal{F}\in\Lambda$ 有 $\mathcal{R}\subset\mathcal{F}$ 的极大子集，那么 $0\le|\mathcal{R}|<m$. 由于 $H\not\subset \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{R})$, 选取 $x\in H\setminus \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{R})$, 存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得所有的 $x_n\notin\cup\mathcal{R}$. 让 $L=\langle x_n\rangle$, $\Gamma=\{\mathcal{F}\in\Lambda: \mathcal{R}\subset\mathcal{F}\}$. 如果 $\mathcal{F}\in\Gamma$，那么 $\cup\mathcal{F}$ 是 x 的序列邻域, 于是 L 与 $\mathcal{F}$ 的某些元相交. 因为 $\mathcal{P}$ 是点可数的且 Γ 是不可数的, 所以存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $L\cap P\neq\varnothing$ 且有 Γ 的不可数个元含有 P, 于是 $P\notin\mathcal{R}$ 且有 Γ (因而 Λ)的不可数个元含有 $\mathcal{R}\cup\{P\}$, 这与 $\mathcal{R}$ 的极大性矛盾. 故仅有至多可数个 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $H\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$. ▮

推论 2.1.4(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]) (1) 具有点可数 k 网的紧空间是可度量空间.

(2) 具有点可数 k 网的 k 空间是序列空间.

证明. (1) 设 X 是具有点可数 k 网 $\mathcal{P}$ 的紧空间, 则 X 是正则空间. 让 $\mathcal{P}'=\cup\{\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}: \mathcal{F}$ 是 X 的极小序列邻域$\}$, $\mathcal{B}=\{\mathrm{int}(\cup\mathcal{F}): \mathcal{F}\in(\mathcal{P}')^{<\omega}\}$. 这时 X 的极小序列邻域就是 X 的极小覆盖. 由引理 2.1.3, $\mathcal{B}$ 是可数的. 往证 $\mathcal{B}$ 是 X 的基. 对于每一 $x\in U\in\tau$，存在 X 的开子集 V 和 $\mathcal{H}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in V\subset\cup\mathcal{H}'\subset U$. 不妨设 $\mathcal{H}'$ 是 V 的极小覆盖，对于每一 $H\in\mathcal{H}'$, 存在 $x_H\in V\setminus\cup(\mathcal{H}'\setminus\{H\})$, 令 $C=\{x_H: H\in\mathcal{H}'\}$, 则存在 $\mathcal{H}''\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $X\setminus V\subset\cup\mathcal{H}''\subset X\setminus C$. 让 $\mathcal{H}=\mathcal{H}'\cup\mathcal{H}''$, 则 $\mathcal{H}$

是 X 的序列邻域，于是存在 $\mathcal{H}$ 的子集 $\mathcal{F}$ 是 X 的极小序列邻域. 如果 H∈$\mathcal{H}$ ’，则 H 是 $\mathcal{H}$ 中含有 x_H 的唯一元，于是 H∈$\mathcal{F}$，从而 $\mathcal{H}' \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{P}'$ 且 $x \in V \subset \mathrm{int}(\cup \mathcal{H}') \subset U$. 所以 $\mathcal{B}$ 是 X 的基. 故 X 是可度量空间.

(2) 设 X 是具有点可数 k 网的 k 空间. 若 F 是 X 的序列闭集，对于 X 的任一紧子集 K，如果 $F \cap K$ 不是 K 的闭子集，由于 K 是可度量空间，于是存在 $F \cap K$ 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $K \setminus F$ 中的点，这与 F 是 X 的序列闭集相矛盾，从而 $F \cap K$ 是 K 的闭子集，所以 F 是 X 的闭子集. 故 X 是序列空间. ▋

引理 2.1.5　对于空间 X，考虑下述条件:

(1) X 有点可数覆盖满足(B).

(2) X 是具有点可数 cs*网的 α_4 空间.

(3) X 是具有点可数 wcs*网的 α_4 空间.

(4) X 有点可数覆盖满足(A).

那么(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4). 若更设 X 是正则空间，那么(4) $\Rightarrow$ (1).

证明. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)是显然的.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设空间 X 是 α_4 空间，且 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 wcs*网. 若 $\mathcal{P}$ 不具有(A)，则对于某一 $x \in U \in \tau$ 不存在 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x \in \mathrm{int}_s(\cup \mathcal{F}) \subset \cup \mathcal{F} \subset U$. 对于 U 的每一可数子集 C_j，让$\{P \in \mathcal{P}: P \cap C_j \neq \varnothing,\ P \subset U\} = \langle P_{ij} \rangle$. 让 $C_0 = \{x\}$，那么 P_{10} 不是 x 在 X 中的序列邻域，存在 $U \setminus P_{10}$ 中收敛于点 x 的序列$\{x_{1n}\}$. 让 $C_1 = \langle x_{1n} \rangle$，因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网，存在 $n_1 \in N$ 和 C_1 的无限子集 C_1' 使得 $C_1' \subset \bigcup\{P_{ij} : 1 \le i \le n_1,\ 0 \le j \le 1\}$. 不失一般性，我们可以设 $C_1' = C_1$，那么$\bigcup\{P_{ij} : 1 \le i \le n_1,\ 0 \le j \le 1\}$不是 x 在 X 中的序列邻域. 继续上述的过程，对于每一 $m \in N$，可以归纳地选取 $C_m = \{x_{mn} : n \in N\} \subset U$ 和递增的序列$\{n_m\}$使得序列$\{x_{mn}\}_n$ 收敛于 x，且 $C_m \subset \bigcup\{P_{ij} : 1 \le i \le n_m,\ 1 \le j \le m\} \setminus \bigcup\{P_{ij} : 1 \le i \le n_{m-1},\ 0 \le j \le m-1\}$. 这说明每一 $P \in \mathcal{P}$ 仅与有限个 C_m 相交. 让 $S = \{x\} \cup (\bigcup_{m \in N} C_m)$，则 S 是 X 在 x 的扇. 因为 X 是 α_4 空间，S 有对角收敛于 x，从而存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $P \subset U$ 且 P 与无限个 C_m 相交，矛盾. 故 $\mathcal{P}$ 有(A). 所以 X 有点可数覆盖满足(A).

(2)$\Rightarrow$(1). 设空间 X 是具有点可数 cs*网的α_4空间. 让 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 cs*网. 对于每一 $x\in U\in\tau$, 置

$\mathcal{F}_x=\{\cup\mathcal{P}'_x : \mathcal{P}'_x\in(\mathcal{P})_x{}^{<\omega}$ 且$\cup\mathcal{P}'_x$是 x 在 X 中的序列邻域$\}$.

则 $\mathcal{F}_x$是可数的. 由定理 1.4.13 的(3)$\Rightarrow$(2)知, $\mathcal{F}_x$是 x 在 X 中的网. 从而, 存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})\subset\cup\mathcal{F}\subset U$, 且 $x\in\cap\mathcal{F}$. 因此, $\mathcal{P}$满足条件(B).

(4)$\Rightarrow$(1). 设 X 是正则空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的满足(A)的点可数覆盖. 对于每一 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$, 置 $M(\mathcal{F})=\{x\in X : \mathcal{F}$ 是$\{x\}$的极小序列邻域$\}$. 对于每一 $P\in\mathcal{P}$. 让

$P'=P\cup(\cup\{M(\mathcal{F}): \mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}, P\in\mathcal{F}\})$.

那么 $P'\subset cl(P)$. 事实上, 对于每一 $x\in M(\mathcal{F})$和 $P\in\mathcal{F}$有 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F})$, 而 $x\notin \mathrm{int}_s(\cup(\mathcal{F}\setminus\{P\}))$, 于是存在 P 中收敛于点 x 的序列, 因此 $x\in cl(P)$, 所以 $P'\subset cl(P)$. 让$\mathcal{P}'=\{P': P\in\mathcal{P}\}$. 对于每一 $x\in X$, 置$\mathcal{A}_x=\cup\{\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}: x\in M(\mathcal{F})\}$, 由引理 2.1.3, 仅对至多可数个$\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$有 $x\in M(\mathcal{F})$, 所以$\mathcal{A}_x$是可数的. 因为 $x\in P'$当且仅当 $x\in P$, 或 $x\in M(\mathcal{F})$且 $P\in\mathcal{F}$, 于是 $P\in\mathcal{A}_x$, 故$\mathcal{P}'$是点可数的. 对于每一 $x\in W\in\tau$, 由于 X 的正则性, 存在 $U\in\tau$ 使得 $x\in U\subset cl(U)\subset W$. 选取 $\mathcal{F}_0\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F}_0)\subset\cup\mathcal{F}_0\subset U$. 不妨设 $x\in M(\mathcal{F}_0)$. 让 $\mathcal{F}_0'=\{P': P\in\mathcal{F}_0\}$, 那么对于每一 $P'\in\mathcal{F}_0'$有 $x\in P'$. 另一方面, $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{F}_0')\subset\cup\mathcal{F}_0'\subset cl(\cup\mathcal{F}_0')\subset cl(U)\subset W$. 所以$\mathcal{P}'$满足(B).

(4)$\Rightarrow$(3). 设空间(X, τ)有点可数覆盖 $\mathcal{P}$满足(A). 显然, (A)蕴含 wcs*网. 对于任一 $x_0\in X$, 设空间(X, τ^*)是(X, τ)在 x_0的正则化拓扑空间, 那么τ^*是正则空间. 让$\mathcal{P}^*=\mathcal{P}\cup\{\{x\} : x\in X\}$, 则 $\mathcal{P}^*$在空间(X, τ^*)是点可数覆盖且满足(A). 事实上, 设 $x\in U\in\tau^*$, 若 $x\neq x_0$, 则$\{x\}\in\mathcal{P}^*$且在τ^*中 $x\in \mathrm{int}_s(\{x\})=\{x\}\subset U$, 若 $x=x_0$, 则存在 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得在τ中 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{P}')\subset\cup\mathcal{P}'\subset U$. 因为$\cup\mathcal{P}'$是 x 在(X, τ)中的序列邻域, 于是$\cup\mathcal{P}'$是(X, τ^*)的序列开集, 所以在τ^*中 $x\in \mathrm{int}_s(\cup\mathcal{P}')=\cup\mathcal{P}'\subset U$, 故$\mathcal{P}^*$有性质(A). 由(4)$\Rightarrow$(1)知(X, τ^*)具有点可数覆盖满足(B), 所以(X, τ^*)是 snf 可数空间, 故(X, τ)在 x_0是 snf 可数空间. 因此(X, τ)是

α_4空间. ▮

引理 2.1.6 对于空间 X, 考虑下述条件:

(1) X 有点可数 cs*网且 X 的每一紧子集是序列紧的.

(2) X 有点可数 wcs*网且 X 的每一紧子集是序列紧的.

(3) X 有点可数 k 网.

那么(1)$\Rightarrow$(2)$\Leftrightarrow$(3). 若更设 X 是正则的α_4空间, 那么(2)$\Rightarrow$(1).

证明. 显然, (1)$\Rightarrow$(2). 由推论 2.1.4(1)知(3)$\Rightarrow$(2). 若 X 是正则的α_4空间, 由引理 2.1.5 知(2)$\Rightarrow$(1).

(2)$\Rightarrow$(3). 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 wcs*网且 X 的每一紧子集是序列紧的. 对于 X 的紧子集 $K\subset U\in\tau$ 和 $x\in K$, 记

$\mathcal{H}=\{P\in\mathcal{P}: P\subset U\}$, $(\mathcal{H})_x=<P_n(x)>$.

若不存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{H}^{<\omega}$ 使得 $K\subset\cup\mathcal{F}$, 则可选取 K 中的序列$\{x_k\}$使得当 n, j<k 时有 $x_k\notin P_n(x_j)$. 这时每一 $P_n(x_j)$仅含有$\{x_k\}$的有限项. 因为 K 是序列紧的, 所以序列$\{x_k\}$存在收敛的子序列$\{x_{k_i}\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 wcs*网, 于是存在 $P\in\mathcal{H}$ 使得 P 含有无限项 x_{k_i}, 矛盾. 故存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{H}^{<\omega}$ 使得 $K\subset\cup\mathcal{F}$. 这说明 $\mathcal{P}$是 X 的 k 网. (3)成立. ▮

推论 2.1.7 设 X 是强 Fréchet 空间, 那么

(1) 若 X 具有点可数 cs*网, 则 X 具有点可数基.

(2) 若 X 是具有点可数 wcs*网的正则空间, 则 X 具有点可数基.

(3) 若 X 具有点可数 wcs*网, 则 X 是第一可数空间.

证明. (1) 设 X 是具有点可数 cs*网的强 Fréchet 空间. 由引理 2.1.5, X 具有点可数覆盖 $\mathcal{P}$ 满足(B). 由引理 1.4.7, 条件(B)中的序列邻域可加强为相应点的邻域. 这时 X 是第一可数空间. 对于每一 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$, 置 $\mathcal{H}(\mathcal{F})=\{H\subset X: \mathcal{F}$ 是 H 的极小序列邻域$\}$, $V(\mathcal{F})=\mathrm{int}(\cup(\mathcal{H}(\mathcal{F})\cap\mathcal{P}))$, $\mathcal{V}=\{V(\mathcal{F}): \mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}\}$.

首先, $\mathcal{V}$ 是 X 的点可数集族. 若 $x\in V(\mathcal{F})$, 则存在 $H\in\mathcal{H}(\mathcal{F})\cap\mathcal{P}$ 使得 $x\in H$. 由引理 2.1.3, 仅有至多可数个 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $H\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$, 而 x 属于 $\mathcal{P}$ 的至多可数个元, 于是 x 属于 $\mathcal{V}$的至多可数个

元. 其次, $\mathcal{V}$是 X 的基. 对于每一$x\in U\in\tau$, 存在$\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得$x\in \mathrm{int}(\cup\mathcal{F})\subset U$, 不妨设$\mathcal{F}$是$\{x\}$的极小序列邻域. 取 $\mathcal{G}\in\mathcal{P}^{<\omega}$使得 $x\in\cap\mathcal{G}$, $x\in \mathrm{int}(\cup\mathcal{G})\subset\cup\mathcal{G}\subset \mathrm{int}(\cup\mathcal{F})$. 若 $G\in\mathcal{G}$, 那么$G\in\mathcal{H}(\mathcal{F})$, 于是 $\mathrm{int}(\cup\mathcal{G})\subset V(\mathcal{F})$, 从而$x\in V(\mathcal{F})\subset U$. 即$\mathcal{V}$是 X 的点可数基.

由引理 2.1.6 和(1)知(2)成立.

设(X,τ)是具有点可数 wcs*网的强 Fréchet 空间, 我们证明 X 是第一可数空间. 对于任一$x_0\in X$, 设空间(X,τ^*)是(X,τ)在x_0的正则化拓扑空间, 那么τ^*是正则空间. 设$\mathcal{P}$是空间(X,τ)的点可数 wcs*网, 记$\mathcal{P}^*=\{\{x\}: x\in X\}\cup\mathcal{P}$, 则$\mathcal{P}^*$是$(X,\tau^*)$的点可数 wcs*网. 由引理 1.4.15, (X,τ^*)也是强Fréchet空间. 由(2), (X,τ^*)是第一可数空间, 于是(X,τ)在x_0具有可数局部基. 故 X 是第一可数空间. ∎

引入条件(A)和(B)的目的之一是想寻求从点可数 k 网到点可数 cs*网的过渡条件. 这涉及刘川提出的下述问题.

问题 2.1.8(林寿, 燕鹏飞[1998]) 若具有点可数 k 网的 Fréchet 的正则空间 X 不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}, 那么 X 是否具有点可数的 cs*网?

引理 2.1.6表明, 具有点可数k网的正则的α_4空间具有点可数的cs*网. 在对该问题的讨论中, 我们意外地发现问题 2.1.1(4)的回答是肯定的. 为此, 下面说明S_2, S_ω与弱第一可数性的关系.

定理 2.1.9 设空间 X 具有点可数 wcs*网, 那么

(1) 如果σX不含有闭子空间同胚于S_2, 则σX是 Fréchet 空间.

(2) 如果σX不含有闭子空间同胚于S_ω, 则σX是 gf 可数空间.

证明. 让$\mathcal{P}$是空间 X 的点可数 wcs*网.

(1) 我们用反证法证明(1)成立. 设σX不是Fréchet空间. 由引理 1.4.11, 存在X的子集H使得 $\mathrm{cl}_s(H)$不是σX的闭子集. 因为σX是序列空间, 存在 $\mathrm{cl}_s(H)$中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x\in X\setminus \mathrm{cl}_s(H)$. 不妨设$\{x_n\}$的各项是两两互不相同的且所有的$x_n\notin H$. 由于 X 是$T_2$空间, 存在 X 中两两互不相交的开子集列$\{V_n\}$使得每一$x_n\in V_n$. 对于每一$n\in N$, 存在$H\cap V_n$中的序列$\{x_{nm}\}$收敛于点$x_n$. 置$C=[x_n]\cup\{x_{nm}: n, m\in N\}$, 则C是x在X中的梳. 如果$\sigma C$不同胚于$S_2$, 因为$\sigma C$

是序列空间, 所以它的拓扑由收敛序列所确定, 故C有对角. 让$\{y_k\}$是C中收敛于某点y的对角. 由于 $x\notin cl_s(H)$, 所以 $y\neq x$, 从而对于某个 $i\in N$ 有 $y\in V_i$, 于是存在 $j\in N$ 使得当 $k\geq j$ 时有 $y_k\in V_i$, 这与$\{V_n\}$是两两互不相交的相矛盾, 故σ C 同胚于 S_2. 置 $K=[x_n]$, $\mathcal{R}=\{P\in\mathcal{P}$: $P\cap\{x_{nm}$: n, $m\in N\}\neq\varnothing$, $cl(P)\cap K=\varnothing\}$, 则 $\mathcal{R}$ 是可数的. 让 $\mathcal{R}=\langle P_k\rangle$. 对于每一 $n\in N$, 存在 $m_n\in N$ 使得$\{x_{nm}$: $m\geq m_n\}\subset X\setminus\bigcup_{k\leq n}cl(P_k)$. 取 $S=K\cup\{x_{nm}$: $n\in N$, $m\geq m_n\}$, 那么σ S 同胚于 S_2. 如果σ S 不是σ X 的闭子集, 存在 S 中的序列$\{x_{n_im_i}\}$收敛于 $x'\notin S$. 我们可以假设 $n_{i+1}>n_i$. 置 $K_1=[x_{n_im_i}]$, 那么 $K_1\cap K=\varnothing$, 于是存在 X 中的开子集 U 使得 $K_1\subset U\subset cl(U)\subset X\setminus K$. 由于$\mathcal{P}$是 X 的 wcs*网, 存在$P\in\mathcal{P}$使得$P\cap K_1$是无限的且$P\subset U$, 从而有$j\in N$使得$P=P_j$, 由$m_n$的选取和S的定义知对于每一$n_i\geq j$有$x_{n_im_i}\notin P$, 矛盾. 故$\sigma$ S 在σ X 中是闭的, 所以σ X 含有闭子空间同胚于 S_2. (1)成立.

(2) 设σ X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

首先, 我们证明 X 是α_4空间. 若 X 不是α_4空间, 则存在 X 中的点x 及 X中在 x的扇 F 使得F 没有对角收敛于 x. 置

$F=\{x\}\cup\{x_{nm}$: n, $m\in N\}$,

$\mathcal{R}=\{P\in\mathcal{P}: P\cap\{x_{nm}$: n, $m\in N\}\neq\varnothing$, $x\notin cl(P)\}=\langle P_k\rangle$.

对于每一 $n\in N$ 存在 $m_n\in N$ 使得$\{x_{nm}$: $m\geq m_n\}\subset X\setminus\bigcup_{k\leq n}cl(P_k)$. 取 $T=\{x\}\cup\{x_{nm}$: $n\in N$, $m\geq m_n\}$, 则 T 是 x 在 X 中的扇且没有对角收敛于 x. 如果存在 T 中的序列$\{x_{n_im_i}\}$收敛于 $x'\neq x$. 不妨设 $n_{i+1}>n_i$, 那么存在 $P\in\mathcal{R}$ 使得 $P\cap\langle x_{n_im_i}\rangle$是无限的, 这与 m_n 的选取及 T 的构造相矛盾. 因此σ T 是σ X 的闭子空间且同胚于 S_ω, 矛盾, 故 X 是α_4 空间.

其次, 证明 X 是 snf 可数空间. 对于任一 $x_0\in X$, 设空间(X, τ^*)是(X, τ)在 x_0的正则化拓扑空间, 那么τ^*具有点可数的 wcs*网 $\mathcal{P}\cup\{\{x\}: x\in X\}$. 由引理 1.4.15, τ^*是正则的α_4空间. 由引理2.1.5, τ^*具有点可数覆盖满足条件(B), 于是τ^*在x_0具有可数的sn网, 从而τ 在x_0也具

有可数的 sn 网, 故 X 是 snf 可数空间.

由定理 1.4.13, σX 是 gf 可数空间. ▌

由推论 1.3.9, 引理 1.4.2 和引理 1.4.3 有下述结果.

引理 2.1.10(Tanaka[1987b]) 空间 X 是度量空间的商 s 映象当且仅当 X 是具有点可数 cs*网的序列空间. ▌

下述两个推论肯定地回答了 2.1.1 中的全部问题.

推论 2.1.11 设 X 是具有点可数 wcs*网的序列空间, 那么

(1) X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2.

(2) X 是 gf 可数空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

(3) X 是第一可数空间当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

若更设 X 是正则空间, 那么

(4) X 具有点可数基当且仅当 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

证明. 由定理 2.1.9 及推论 1.4.8 知(1)~(3)成立. 若更设 X 是正则空间, 如果 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 由(3)和推论 2.1.7 可得(4). ▌

推论 2.1.12 (1) 空间 X 具有点可数 sn 网当且仅当 X 具有点可数 cs 网且 σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω.

(2) 空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 是具有点可数 cs 网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_ω.

(3) 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是具有点可数 cs*网的序列空间且不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

证明. (1) 设空间 X 具有点可数 cs 网且 σX 不含有闭子空间同胚于 S_ω. 由定理 2.1.9 和定理 1.4.13, X 是 snf 可数空间. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数 cs 网, 我们证明 $\mathcal{P}$ 的某子族构成 X 的 sn 网. 对于每一 $x\in X$, 设 $\langle V_n\rangle$ 是 x 在 X 中递减的 sn 网. 置 $\mathcal{P}_x=\{P\in\mathcal{P}$: 存在 $n\in N$ 使得 $V_n\subset P\}$, 那么 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中关于有限交封闭的序列邻域族. 若 $\mathcal{P}_x$ 不是 x 在 X 中的 sn 网, 则存在 x 在 X 中的开邻域 G 使得 $\mathcal{P}_x$ 中的每一元都不含于 G 中. 记 $\{F\in\mathcal{P}: x\in F\subset G\}=\langle F_m\rangle$, 那

么每一 $V_n \not\subset F_m$. 取定 $x_{nm} \in V_n \setminus F_m$. 对于 $n \geq m$, 令 $y_k = x_{nm}$, 其中 $k = m + \frac{n(n-1)}{2}$, 则序列 $\{y_k\}$收敛于x, 于是存在 $m, i \in N$ 使得$\{y_k : k \geq i\} \subset F_m$. 取定$k \geq i$使得对于某个$n \geq m$有$y_k = x_{nm}$, 那么 $x_{nm} \in F_m$, 矛盾. 从而, $\bigcup_{x \in X} \mathcal{P}_x$ 是 X 的点可数 sn 网. (1)成立.

由(1)和引理 1.4.6 可得(2). 由引理 2.1.10, 推论 2.1.11 和推论 2.1.7 可得(3). ■

推论 2.1.13(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]) 具有点可数 k 网的可数紧的 k 空间是紧度量空间.

证明. 设 X 是具有点可数 k 网的可数紧的 k 空间. 由推论 2.1.4 和推论 2.1.11, X 是第一可数空间. 记 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 k 网. 对于每一 $x \in U \in \tau$, 由引理 2.1.5, 存在 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $x \in \mathrm{int}_s(\cup \mathcal{F}) \subset \cup \mathcal{F} \subset U$. 由于 X 是第一可数空间, 于是 $x \in \mathrm{int}(\cup \mathcal{F}) \subset \cup \mathcal{F} \subset U$, 从而存在 X 的开子集 V 使得 $x \in V \subset \cup \mathcal{F} \subset U$. 由推论 2.1.4(1)所证知, X 具有可数基, 因此 X 是紧度量空间. ■

若空间 X 关于度量子空间组成的点可数覆盖具有弱拓扑, 则 X 是度量空间的商 s 映象. 如果更设 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 则 X 具有点可数基. 由此可得出 Franklin 和 Thomas[1977b]的定理: 具有可度量"块"的 k_ω 空间是可度量空间当且仅当它不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω.

推论 2.1.14(Burke, Michael[1976]) 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 有点可数基.

(2) X 有点可数覆盖 $\mathcal{P}$ 使得如果 $x \in U \in \tau$, 则存在 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$ 有 $x \in \mathrm{int}(\cup \mathcal{F}) \subset \cup \mathcal{F} \subset U$ 且 $x \in \cap \mathcal{F}$.

若更设 X 是正则空间, 则它们也与下述条件相互等价:

(3) X 是 k 空间且有点可数覆盖 $\mathcal{P}$ 使得如果 $x \in U \in \tau$, 则存在 $\mathcal{F} \in \mathcal{P}^{<\omega}$ 有 $x \in \mathrm{int}(\cup \mathcal{F}) \subset \cup \mathcal{F} \subset U$.

证明. (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)是显然的. 若空间 X 满足(2), 则 X 是具有点可数 cs*网的第一可数空间, 由推论 2.1.7 知 X 具有点可数基. 若正则空间 X 满足(3), 则 X 具有点可数 k 网, 由推论 2.1.4 知 X 是序列空间. 又由于这时 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω, 由推论 2.1.11 知 X 具有点可数基. ■

具有点可数基的空间是亚 Lindelöf 空间. 例 1.5.4 已表明具有点可数弱基的正则空间未必是亚 Lindelöf空间. 定理 2.1.15 将说明具有点可数 wcs*网空间与亚 Lindelöf 空间的关系. 为证明的简明起见, 引入几个术语和记号. 空间 X 的覆盖 $\mathscr{U}$ 称为 X 的按子标良序覆盖, 若 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 其中 Λ 是良序子标集. 对于这种覆盖 $\mathscr{U}$, 若 $x\in X$, 记 $\alpha(x)=\min\{\alpha\in\Lambda:x\in U_\alpha\}$; 若 $\alpha\in\Lambda$, 记 $\tilde{U}_\alpha=\{x\in X:\alpha(x)=\alpha\}$. 显然, $\tilde{U}_\alpha\subset U_\alpha$.

定理 2.1.15 具有点可数 wcs*网的正则的 Fréchet 空间是遗传亚 Lindelöf 空间.

证明. 考虑下述断言:

(1) X 是具有点可数 wcs*网的正则的 Fréchet 空间.

(2) X 的每一按子标良序开覆盖 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 存在点可数加细 $\mathscr{H}$ 使得若 $x\in X$, 则 $x\in \mathrm{int}(\cup\{P\in\mathscr{H}:x\in \mathrm{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}\})$.

(3) X 的每一按子标良序开覆盖 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 存在点可数开加细 $\{V_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 使得若 $\alpha\in\Lambda$, 则 $\tilde{U}_\alpha\subset V_\alpha\subset U_\alpha$.

(4) X 是遗传亚 Lindelöf 空间.

我们证明(1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(4).

(1)$\Rightarrow$(2). 设空间 X 满足断言(1). 让 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 wcs*网. 对于 X 的每一按子标良序开覆盖 $\mathscr{U}$, 置 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, $\mathscr{H}=\{P\in\mathscr{P}$: 存在 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $P\subset U_\alpha\}$, 则 $\mathscr{H}$ 是 $\mathscr{U}$ 的点可数加细. 若 $x\in X$, 那么 $x\in U_{\alpha(x)}$, 于是存在 X 的开子集 V 使得 $x\in V\subset \mathrm{cl}(V)\subset U_{\alpha(x)}$. 若 $x\in X\setminus \mathrm{int}(\bigcup\{P\in\mathscr{H}:x\in \mathrm{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}\})=\mathrm{cl}(X\setminus\bigcup\{P\in\mathscr{H}:x\in \mathrm{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}\})$, 则存在 $X\setminus\bigcup\{P\in\mathscr{H}:x\in \mathrm{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}\}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 从而存在 $P\in\mathscr{P}$ 使得 $P\subset V$ 且 P 含有序列 $\{x_n\}$ 的无限项, 那么 $x\in \mathrm{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}$ 且 $P\in\mathscr{H}$, 这与 $\{x_n\}$ 的选取相矛盾. 故 $x\in \mathrm{int}(\bigcup\{P\in\mathscr{H}:x\in \mathrm{cl}(P)\subset U_{\alpha(x)}\})$.

(2)$\Rightarrow$(3). 设空间 X 满足断言(2)且 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的按子标良序开覆盖. 让 $\mathscr{H}$ 是 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的满足(2)的点可数加细. 对于每一 $\alpha\in\Lambda$, 置 $V_\alpha=\mathrm{int}(\bigcup\{H\in\mathscr{H}:\mathrm{cl}(H)\subset U_\alpha$, 当 $\beta<\alpha$ 时有 $\mathrm{cl}(H)\not\subset U_\beta\})$, 则 $\{V_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 的点可数开加细且满足: 若 $\alpha\in\Lambda$, 则

$\tilde{U}_{\alpha} \subset V_{\alpha} \subset U_{\alpha}$.

(3)$\Rightarrow$(4). 设空间 X 满足断言(3)且 Y 是 X 的子空间. 对于 Y 的按子标良序开覆盖 $\mathscr{W}$, 置 $\mathscr{W}$={W_{α} : $\alpha<\gamma$}, 取 X 的按子标良序开覆盖{U_{α} : $\alpha\le\gamma$}使得 U_{γ}=X 且当$\alpha<\gamma$时有 $U_{\alpha}\cap$Y=W_{α}. 让{V_{α} : $\alpha\le\gamma$}是{U_{α} : $\alpha\le\gamma$}的满足(3)的点可数开加细. 若 y$\in$Y, 则存在 $\alpha<\gamma$ 使得 y$\in \tilde{U}_{\alpha}\subset V_{\alpha}$, 从而{$V_{\alpha}\cap$Y: $\alpha<\gamma$}是$\mathscr{W}$的点可数开加细, 因此 Y 是亚 Lindelöf 空间. 故 X 是遗传亚 Lindelöf 空间. ▌

例 2.1.16 (1) X 有点可数覆盖满足(B)$\not\Rightarrow$X 有点可数 cs 网; 如例 1.5.6 中的空间 X 是具有点可数 k 网的正则的 gf 可数空间, 于是 X 具有点可数覆盖满足(B), 但是 X 不具有点可数 cs 网.

(2) X 有点可数 sn 网$\not\Rightarrow$X 有点可数 k 网; 例如极大紧化βN.

(3) X既有点可数覆盖满足(A)又有点可数k网$\not\Rightarrow$X有点可数 cs*网; 如例 1.5.8 中的半园盘拓扑空间X 是具有点可数k网的第一可数空间, 由引理 2.1.5, X 有点可数覆盖满足(A), 但是 X 不具有点可数 cs*网. 这表明引理 2.1.5, 引理 2.1.6, 推论 2.1.7, 问题 2.1.8, 推论 2.1.11 和推论 2.1.14 中空间的正则性是必不可少的.

(4) X 有点可数 cs 网$\not\Rightarrow$X 有点可数覆盖满足(A); 如例 1.5.2 中的序列扇 S_{ω}.

(5) X 有点可数 k 网$\not\Rightarrow$X 有点可数 cs*网, 或 X 有点可数覆盖满足(A); 如例 1.5.2 中的扇空间 S_{ω_1}.

(6) X 有点可数 cs 网且不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_{ω} $\not\Rightarrow$ σX 不含有闭子空间同胚于 S_{ω}; 如例 1.5.3 中的空间 T.

(7) X 是具有点可数基的正则空间$\not\Rightarrow$X 有点可数闭 k 网; 如 Foged[1996]中的空间 X. ▌

问题 2.1.17 (1)(刘川, Tanaka[1996b]) 设 X 是具有点可数 cs*网的序列空间, 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_2, 那么 X 是否具有点可数 cs 网?

(2) 用度量空间的适当映象刻画具有点可数 wcs*网的空间.

2.2 k 网与闭映射

本节介绍具有点可数 k 网空间的闭映射性质. 该问题的探讨源于 Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]关于具有点可数覆盖空间运算性质的研究. 他们证明了完备映射保持具有点可数 k

网的空间, 并且提出问题: 度量空间的闭映象是否具有点可数 k 网? 利用 k 网对度量空间闭映象的刻画, Foged[1985]肯定地回答了这一问题. 另一方面, 从例 1.5.2 中的扇空间 S_{ω_1} 知, 介于具有点可数基性质与具有点可数 cs*网性质之间的拓扑性质或具有点可数闭 k 网性质都不被闭映射所保持. 林寿和 Tanaka[1994]提出下述问题.

问题 2.2.1 具有点可数 k 网空间的闭映象是否具有点可数 k 网?

下述例子否定地回答了问题 2.2.1. 空间 X 的点 x 称为弱 P 点, 如果对于 $X\setminus\{x\}$的每一可数子集 C 有 $x\notin cl(C)$. 由集论拓扑(Kunen[1978])知空间 $N^*=\beta N\setminus N$ 中含有弱 P 点.

例 2.2.2(Sakai[1997b]) 闭映射不保持具有点可数 k 网的空间.

设 D 是任一基数为ω_1 的集合, 赋予 D 离散拓扑, 让 $D^*=\beta D\setminus D$, $E=\{p\in D^*: p$ 是 D^*中的弱 P 点$\}$, 则 E 是 D*的稠子集. 取 $X=D\cup E$, X 赋予βD 的子空间拓扑. 由于每一点是弱 P 点的紧空间是有限集, 且βD 中不存在非平凡的收敛序列, 所以 X 的所有紧子集是有限集, 于是 X 具有点可数 k 网. 让 Y=X/E, $f:X\to Y$ 是自然商映射, 则 f 是闭映射. 由于 D 的每一无限子集的闭包与 E 相交, 所以 Y 同胚于 D 的单点紧化, 从而 Y 不是可度量空间. 由推论 2.1.4, Y 不具有点可数 k 网. ∎

在怎样的附加条件下, 问题 2.2.1 的回答是肯定的? 我们介绍 Sakai 和 Tanaka 等的相关结果. 先叙述几个闭映射的辅助性质.

引理 2.2.3 设$f:X\to Y$是闭映射, K是Y的可数紧子集. 若$f^{-1}(K)$中的序列$\{x_n\}$使得当$n\neq m$时有 $f(x_n)\neq f(x_m)$, 如果下述条件之一成立, 则$\{x_n\}$存在收敛的子序列.

(1) X 是序列空间.

(2) X 是具有点 G_δ 性质的正则空间.

证明. 不妨设$\langle x_n\rangle$不是 X 的闭子集. 如果(1)成立, 那么$\{x_n\}$存在收敛的子序列. 如果(2)成立, 由于 K 是 Y 的可数紧子集且 f 是闭映射, 序列$\{x_n\}$的任何子序列在$f^{-1}(K)$中有聚点. 让 x 是$\{x_n\}$的聚点且$\{V_n\}$是 x 的开邻域列使得每一 $cl(V_{n+1})\subset V_n$. 取$\{x_n\}$的子序列$\{t_k\}$使得每一$t_k\in V_k$. 让 p 是$\{t_k\}$的任一子序列的聚点, 那么$p\in\bigcap_{n\in N}cl(V_n)$, 于是 p=x. 这说明 x 是序列$\{t_k\}$的唯一聚点, 所以$\{t_k\}$是$\{x_n\}$的收敛子序列. ∎

空间 X 称为等紧空间, 若 X 的每一可数紧的闭子集是 X 的紧子集.

引理 2.2.4 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 如果下述条件之一成立, 则 f 是紧覆盖映射.

(1) X 是正规的等紧空间.

(2) X 是正则空间且每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间.

证明. (1) 对于 Y 的非空紧子集 K, 让 $g=f_{|f^{-1}(K)}:f^{-1}(K)\to K$, 则 g 是闭映射. 由于 $f^{-1}(K)$ 是正规的等紧空间, 从定理 1.3.3 中(2)$\Rightarrow$(3)的证明知, 每一 $\partial g^{-1}(y)$ 是 $f^{-1}(K)$ 的紧子集. 再由引理 1.3.2, 存在 $f^{-1}(K)$ 的闭子集 Z 使得 $g_{|Z}:Z\to K$ 是完备映射, 从而 Z 是 X 的紧子集且 f(Z)=K, 故 f 是紧覆盖映射.

(2) 由于每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间, 由引理 1.3.2, 存在 X 的闭子集 F 使得 $h=f_{|F}:F\to Y$ 是闭映射且每一 $h^{-1}(y)$ 是 F 的 Lindelöf 子空间. 对于 Y 的非空紧子集 K, $h^{-1}(K)$ 是 F 的 Lindelöf 子空间, 于是 $h^{-1}(K)$ 是仿紧空间, 从而 $h^{-1}(K)$ 是正规的等紧空间. 由(1), 存在 $h^{-1}(K)$ 的紧子集 L 使得 h(L)=K, 即 f(L)=K, 所以 f 是紧覆盖映射. ∎

定理 2.2.5(林寿, Tanaka[1994]) 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, X 具有点可数 k 网. 如果下述条件之一成立, 则 Y 也具有点可数 k 网.

(1) X 是 k 空间.

(2) X 是具有点 G_δ 性质的正则空间.

(3) X 是正规的等紧空间.

(4) X 是正则空间且每一 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间.

证明. 由推论 2.1.4, X 的每一紧子集是可度量子空间. 由引理 2.2.3 和引理 2.2.4, Y 的每一紧子集是序列紧的. 由引理 2.1.6, 为证明 Y 具有点可数 k 网, 只须证明 Y 具有点可数 wcs*网. 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 k 网. 令 $D=\{x_y : y\in Y\}$, 其中取定每一 $x_y\in f^{-1}(y)$, 再令 $\mathcal{P}^*=\{f(D\cap P) : P\in\mathcal{P}\}$, 那么 $\mathcal{P}^*$ 是 Y 的点可数覆盖, 往证它是 Y 的 wcs*网. 设 $\{y_n\}$ 是 Y 中收敛于点 y 的序列, 且 U 是 y 的邻域. 不妨设 y, y_n 的各项是两两互不相同的且所有的 $y_n\in U$. 对于每一 $n\in N$, 选择 $x_n\in f^{-1}(y_n)\cap D$, 则在 $f^{-1}(U)$ 中序列 $\{x_n\}$ 存在收敛的子序列. 事实上, 如果(1)或(2)成立, 由引

理 2.2.3, 在 $f^{-1}(U)$中序列$\{x_n\}$存在收敛的子序列. 如果(3)或(4)成立, 令 $Z=\langle x_n\rangle\cup\partial f^{-1}(y)$. 因为 f 是闭映射, 所以 Z 是 X 的闭子集且 $g=f_{|Z}:Z\to[y_n]$是闭映射. 由引理 2.2.4, g 是紧覆盖映射, 于是存在 Z 的紧子集 L 使得 $g(L)=[y_n]$, 从而$\langle x_n\rangle\subset L\subset f^{-1}(U)$, 所以在 $f^{-1}(U)$中序列$\{x_n\}$存在收敛的子序列. 这时存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 P 含有$\{x_n\}$的子序列且 $P\subset f^{-1}(U)$, 从而 $f(D\cap P)$含有$\{y_n\}$的子序列且 $f(D\cap P)\subset U$. 因此 $\mathcal{P}$*是 Y 的 wcs*网. 故 Y 具有点可数 k 网. ▉

由定理 2.2.5 和推论 2.1.7, 我们有

推论 2.2.6 开闭映射保持具有点可数基的正则空间. ▉

引理 2.2.4 已表明闭映射与紧覆盖映射的密切联系. 在例 2.2.2 中 $f:X\to Y$ 是闭映射, X 的所有紧子集是有限集, Y 是紧空间, 于是 f 不是紧覆盖映射, 所以具有点可数 k 网空间上的闭映射未必是紧覆盖映射.

猜测 2.2.7 设 $f:X\to Y$ 是紧覆盖的闭映射. 若空间 X 具有点可数 k 网, 那么空间 Y 具有点可数 k 网当且仅当 Y 的每一紧子集是可度量的.

作为对这一猜测的一种支持, 下面我们将证明在定理2.2.5 的条件(1)或(2)下, f 是紧覆盖映射.

定义 2.2.8(Davis[1984]) 空间 X 称为序列可分的, 如果存在 X 的可数子集 D 使得对于每一 $x\in X$ 有 D 中的序列$\{x_n\}$使得$\{x_n\}$在 X 中收敛于 x. 这时 D 称为 X 的序列稠子集.

引理 2.2.9(林寿, 燕鹏飞[2001a]) 设 X 是序列可分空间, 如果下述条件之一成立, 则 X 具有可数网.

(1) X 有点可数 cs*网.

(2) X 是具有点可数 wcs*网的正则空间.

证明. 设 D 是序列可分空间 X 的可数的序列稠子集.

(1) 设 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 cs*网, 置 $\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P}: P\cap D\neq\varnothing\}$, 则 $\mathcal{P}'$是可数的. 对于每一 $x\in U\in\tau$, 存在D 中的序列 S收敛于 x, 于是存在 $P\in\mathcal{P}$使得 $x\in P\cap S\neq\varnothing$且 $P\subset U$, 从而 $P\in\mathcal{P}'$, 因此 $\mathcal{P}'$是 X 的可数网.

(2) 设 $\mathcal{P}$ 是正则空间 X 的点可数 wcs*网, 置 $\mathcal{P}'=\{cl(P): P\in\mathcal{P}, P\cap D\neq\varnothing\}$, 则 $\mathcal{P}'$是可数的. 对于每一 $x\in U\in\tau$, 存在 D 中的序列 S 和 x 的开邻域 V 使得 S 收敛于 x 且 $cl(V)\subset U$, 于是存在 $P\in\mathcal{P}$使得 P 含有 S 中的无限项且 $P\subset V$, 那么 $cl(P)\in\mathcal{P}'$且 $x\in cl(P)\subset U$, 故 $\mathcal{P}'$是 X 的可数网. ▉

定理 2.2.10(林寿, 刘川[1996]; Shibakov[1995b]) 设 $f:X\to Y$ 是闭映射, 其中 X 是具有点可

数 k 网的正则空间，若下述条件之一成立，则 f 是紧覆盖映射.

(1) X 是 k 空间.

(2) X 是点 G_δ 空间.

证明. 让 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 k 网. 由定理 2.2.5，空间 Y 具有点可数 k 网，因此 Y 的每一紧子集是可度量的. 让 K 是 Y 的紧子集，那么 K 有可数的稠子集 D. 对于每一 $y\in D$，取定点 $x_y\in f^{-1}(y)$，置 $E=\{x_y : y\in D\}$，则 E 是可数的且 f(cl(E))=K. 我们先证明 E 是 cl(E)的序列稠子集. 由引理 2.2.3, E 中的每一序列在 X 中有收敛的子序列. 设 $x\in$ cl(E).

如果(1)成立，不妨设 $x\in \mathrm{cl}(E)\setminus E$. 让 $\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P} : x\notin \mathrm{cl}(P)\}$. 对于 $z\in E$，记$(\mathcal{P}')_z=\langle P_k(z)\rangle$. 取定 $x_1\in E$，则 $x_1\neq x$. 由归纳法可选取 E 的序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in E\setminus\bigcup_{k,n<i}P_k(x_n)$. 否则，存在 $i_0\geq 2$ 使得 $E\subset\bigcup_{k,n<i_0}P_k(x_n)$，于是 $x\in\bigcup_{k,n<i_0}\mathrm{cl}(P_k(x_n))$，矛盾. 设 z 是$\{x_i\}$的一个聚点. 若 $x\neq z$，则存在 X 中分别含有 x, z 的互不相交的开子集 U 和 V. 令 $S=\{x_i\in V\setminus\{z\} : i\in N\}$，则 S 不是 X 的闭子集. 由推论 2.1.4, X 是序列空间，于是 S 不是 X 的序列闭子集，所以存在 S 中的序列 T 收敛于某点 $t\notin S$. 这时 $t\in \mathrm{cl}(V)$，从而 $t\neq x$. 选取 X 中分别含有 x，t 的互不相交的开子集 G 和 W，则存在 $P\in\mathcal{P}$使得 $P\subset W$ 且 P 含有序列 T 的无限项，所以 $P\in\mathcal{P}'$且存在 $k, n\in N$ 使得 $P=P_k(x_n)$，因此当 i>max{k, n}时有 $x_i\notin P$，矛盾. 故 x 是$\{x_i\}$的唯一聚点. 因为$\{x_i\}$的每一子序列在 X 中有聚点，所以$\{x_i\}$收敛于 x.

如果(2)成立，取 X 的开子集列$\{G_i\}$使得每一 $\mathrm{cl}(G_{i+1})\subset G_i$ 且$\{x\}=\bigcap_{i\in N}G_i$，那么对于每一 $i\in N$ 存在 $x_i\in E\cap G_i$. 设 z 是序列$\{x_i\}$的一个聚点，则 $z\in\bigcap_{i\in N}\mathrm{cl}(G_i)=\{x\}$，于是 x 是序列$\{x_i\}$的唯一聚点，所以序列$\{x_i\}$收敛于 x.

由引理 2.2.9, cl(E)具有可数网，故 cl(E)是 Lindelöf 空间. 由引理 2.2.4, $f_{|\mathrm{cl}(E)}:\mathrm{cl}(E)\to K$ 是紧覆盖映射，所以存在 cl(E)的紧子集 L 使得 f(L)=K，因此 f 是紧覆盖映射. ▌

例 2.2.11 (1) 局部紧可展空间上的闭映射未必是紧覆盖映射.

如例 1.5.3，让 X 是 Gillman-Jerison 空间$\psi(N)$，则 X 是局部紧可展空间. 记 $X=\mathcal{A}\cup N$，让 $f:X\to S_1$使得 $f(\mathcal{A})=\{0\}$且 f(n)=1/n，那么 f 是闭映射，但是 f 不是紧覆盖映射.

(2) 具有可数基空间上的闭映射未必是紧覆盖映射.

如 Shibakov[1995b]的例 2.1. 让 $X=N^2 \cup \omega$. 集合 X 赋予下述拓扑: N^2 中的点是 X 的孤立点; N 中的点 n 的邻域基元形如 $\{n\} \cup \{(n, m) \in N^2 : m \geq k\}$, $k \in N$; 0 的邻域基元形如 $\{0\} \cup (N^2 \setminus (\{1, 2, \ldots, k\} \times N))$, $k \in N$. 易验证, 空间 X 具有可数基. 定义 $f: X \to S_1$ 使得 $f(\omega)=\{0\}$ 且 N^2 与 $S_1 \setminus \{0\}$ 一一对应, 则 f 是闭映射, 但是 f 不是紧覆盖映射. ▉

问题 2.2.12(Sakai[1997b]) 是否任一空间可表为具有点可数 k 网空间的闭映象?