1.4 预备知识: 商映射与弱第一可数性

作为预备知识, 本节主要包含两部分的内容. 一是在适当的弱第一可数空间中商映射与紧覆盖映射的关系, 二是介绍几类弱第一可数空间的初步性质.

先叙述序列商映射与闭映射的等价形式.

引理 1.4.1 设 $f:X\to Y$ 是映射, 那么

(1) f 是序列商映射当且仅当若 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集, 则 F 是 Y 的序列闭集.

(2) f 是闭映射当且仅当对于每一 $f^{-1}(y)$的开邻域 U, 存在 y 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)\subset U$.

证明. (1) 设 f 是序列商映射且 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集. 如果 F 中的序列 S 在 Y 中收敛于点 y, 则存在 X 中收敛于 $x\in f^{-1}(y)$的序列 T 使得 f(T)是 S 的子序列, 于是 $T\subset f^{-1}(F)$, 从而 $x\in f^{-1}(F)$, 因此 $y\in F$, 故 F 是 Y 的序列闭集.

反之, 设 f 不是序列商映射, 则存在 Y 中收敛于某点 y 的序列$\{y_n\}$不满足定义 1.2.3(2)的要求. 不妨设所有的 $y_n\neq y$, 让 $F=<y_n>$. 如果$\{x_i\}$是 $f^{-1}(F)$中的序列且在 X 中$\{x_i\}$收敛于 x, 那么 $x\notin f^{-1}(y)$, 于是 $x\in f^{-1}(F)$, 所以 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集, 但是 F 不是 Y 的序列闭集.

(2) 设 f 是闭映射, 对于每一 $f^{-1}(y)$的开邻域 U, 让 $V=Y\setminus f(X\setminus U)$, 那么 V 是 y 的开邻域且 $f^{-1}(V)\subset U$. 反之, 设 F 是 X 的闭子集, 对于每一 $y\in Y\setminus f(F)$, $f^{-1}(y)\subset X\setminus F$, 于是存在 y 的开邻域 V 使得 $f^{-1}(V)\subset X\setminus F$, 从而 $V\cap f(F)=\varnothing$, 所以 f(F)是 Y 的闭子集, 故 f 是闭映射. ▮

下述两个引理在我们的证明中将不加说明地被反复使用.

引理 1.4.2(林寿[1995]) 设映射 $f:X\to Y$.

(1) 若 Y 是 k 空间, f 是紧覆盖映射, 则 f 是商映射.

(2) 若 Y 是序列空间, f 是子序列覆盖映射, 则 f 是商映射.

(3) 若 Y 是 Fréchet 空间, f 是商映射, 则 f 是伪开映射.

(4) 若 X 是序列空间, f 是商映射, 则 f 是序列商映射.

证明. (1) 设 $F\subset Y$ 使得 $f^{-1}(F)$是 X 的闭子集. 对于 Y 的任一紧子集 K, 存在 X 的紧子集 L 使得 f(L)=K, 于是 $F\cap K=f(f^{-1}(F)\cap L)$是 Y 的闭子集, 从而 F 是 Y 的闭子集, 即 f 是商映射.

(2) 设 $F\subset Y$ 使得 $f^{-1}(F)$是 X 的闭子集. 若由 F 中点组成的序列$\{y_n\}$在 Y 中收敛于 y, 则存

在 X 中的紧子集 K 使得 f(K)是$[y_n]$中的子序列. 不妨设 f(K)=$[y_n]$, 那么对于每一 $n\in N$, 存在 $x_n \in K\cap f^{-1}(y_n)$, 设 x 是序列$\{x_n\}$在 X 中的一个聚点, 则 $x\in f^{-1}(y)\cap f^{-1}(F)$, 于是 $y\in F$, 从而 F 是 Y 的序列闭集, 故 F 是 Y 的闭子集, 这说明 f 是商映射.

(3) 对于 X 的开子集 V 及 $f^{-1}(y)\subset V$, 若 $y\in Y\setminus int(f(V))$, 则存在 $Y\setminus f(V)$中的序列$\{y_n\}$收敛于 y. 置 $Z=<y_n>$, $F=f^{-1}(Z)$, 那么 $cl(F)\subset F\cup f^{-1}(y)$. 因为 $f^{-1}(y)\subset V$, 且 $V\cap F=\emptyset$, 所以 $f^{-1}(y)\cap cl(F)=\emptyset$, 从而 F 是 X 的闭子集, 于是 $f^{-1}(Y\setminus Z)=X\setminus F$ 是 X 的开子集, 即 $Y\setminus Z$ 是 Y 的开子集, 矛盾. 故 $y\in int(f(V))$, 因此 f 是伪开映射.

(4) 设 $f^{-1}(F)$是 X 的序列闭集, 那么 $f^{-1}(F)$是 X 的闭子集, 于是 F 是 Y 的闭子集, 从而 F 是 Y 的序列闭集. 由引理 1.4.1(1), f 是序列商映射. ▮

引理 1.4.3 (1) 商映射保持 k 空间性质.

(2) 商映射保持序列空间性质.

(3) 伪开映射保持 Fréchet 空间性质.

证明. (1) 设 $f:X\to Y$ 是商映射, 其中 X 是 k 空间. 若 A 是 Y 的子集使得对于 Y 的每一紧子集 K, $K\cap A$ 是 Y 的闭子集, 如果 L 是 X 的紧子集, 那么 $f^{-1}(A)\cap L=f^{-1}(A\cap f(L))$是 X 的闭子集, 于是 $f^{-1}(A)$是 X 的闭子集, 从而 A 是 Y 的闭子集, 故 Y 是 k 空间.

(2) 设 $f:X\to Y$ 是商映射, 其中 X 是序列空间. 若 U 是 Y 的序列开集, 则 $f^{-1}(U)$是 X 的序列开集, 于是 $f^{-1}(U)$是 X 的开子集, 从而 U 是 Y 的开子集, 这说明 Y 是序列空间.

(3) 设 $f:X\to Y$ 是伪开映射, 其中 X 是 Fréchet 空间. 设 $y\in cl(A)\subset Y$, 如果 $f^{-1}(y)\cap cl(f^{-1}(A))=\emptyset$, 那么 $y\in int(f(X\setminus cl(f^{-1}(A))))\subset Y\setminus cl(A)$, 矛盾, 于是有 $x\in f^{-1}(y)\cap cl(f^{-1}(A))$, 从而存在 $f^{-1}(A)$中的序列$\{x_n\}$收敛于 x, 因此 A 中的序列$\{f(x_n)\}$收敛于 y, 所以 Y 是 Fréchet 空间. ▮

引理 1.4.4 设 $f:Z\to Y$. 让 $g=id_X\times f:X\times Z\to X\times Y$, 那么

(1) 若 X 是局部紧空间, f 是商映射, 则 g 是商映射.

(2) 若 f 是完备映射, 则 g 是完备映射.

证明. (1) 对于 $X\times Y$ 的子集 W, 设 $g^{-1}(W)$是 $X\times Z$ 的开子集, 任取点$(x, y)\in W$, 对于

$z\in f^{-1}(y)$, 选取 x 在 X 中的开邻域 U 使得 cl(U)是 X 的紧子集且 $cl(U)\times\{z\}\subset g^{-1}(W)$, 那么 $cl(U)\times f^{-1}(y)\subset g^{-1}(W)$. 令 $V=\{\alpha\in Y: cl(U)\times f^{-1}(\alpha)\subset g^{-1}(W)\}$, 则$(x, y)\in U\times V\subset W$. 往证 V 是 Y 的开子集. 由于 cl(U)是紧空间, 于是$\pi_2:cl(U)\times Z\to Z$ 是闭映射, 从而 $f^{-1}(V)=\{z\in Z: cl(U)\times f^{-1}f(z)\subset g^{-1}(W)\}=\{z\in Z: cl(U)\times\{z\}\subset g^{-1}(W)\}=Z\setminus\pi_2(cl(U)\times(Z\setminus g^{-1}(W)))$是 Z 的开子集, 所以 V 是 Y 的开子集, 因此 W 是 X×Y 的开子集, 故 f 是商映射.

(2) 对于每一$(x, y)\in X\times Y$, $g^{-1}(x, y)=\{x\}\times f^{-1}(y)$是 X×Z 的紧子集, 所以 g 是紧映射. 另一方面, 对于 X×Z 中每一含 $g^{-1}(x, y)$的开子集 G, 分别存在 X, Z 的开子集 U 和 V 使得$\{x\}\times f^{-1}(y)\subset U\times V\subset G$. 由于 f 是闭映射, 存在 y 在 Y 中的开邻域 H 使得 $f^{-1}(H)\subset V$, 于是 U×H 是(x, y)的开邻域且 $g^{-1}(U\times H)=U\times f^{-1}(H)\subset G$, 所以 g 是闭映射. 因此, g 是完备映射. █

引理 1.4.5 (1) 局部紧空间与 k 空间之积空间是 k 空间.

(2) 设 $\prod_{i\in N} X_i\neq\varnothing$, 则 $\prod_{i\in N} X_i$ 是局部k_ω空间当且仅当所有的X_i是局部k_ω空间, 且至多有限个 X_i 不是紧空间.

证明. (1) 设 X 是局部紧空间, Y 是 k 空间. 让 $Z=\oplus\{K\subset Y: K$ 是 Y 的紧子集$\}$, $f:Z\to Y$ 是自然映射, 则 Z 是局部紧空间且 f 是商映射. 让 $g=id_X\times f:X\times Z\to X\times Y$, 由引理 1.4.4(1), g 是商映射. 由于 X×Z 是局部紧空间, 于是 X×Z 是 k 空间, 从而 X×Y 是 k 空间.

(2) 若 $\prod_{i\in N} X_i$ 是局部 k_ω 空间, 由于每一 X_i 同胚于 $\prod_{i\in N} X_i$ 的闭子空间, 于是 X_i 是局部 k_ω空间. 因为 $\prod_{i\in N} X_i$ 是局部 k_ω空间, 存在 $n\in N$ 使得$\prod_{i\geq n} X_i$是 k_ω空间. 若存在无限个 $i\geq n$ 使得X_i不是紧空间, 那么X_i不是可数紧空间, 于是X_i含有闭子空间同胚于N, 从而N^ω是k_ω空间, 所以 N^ω是σ紧空间. 记 $N^\omega=\bigcup_{n\in N} K_n$, 其中每一 K_n 是 N^ω 的紧子集, 于是K_n 在第 n 个坐标空间上的投影$\pi_n(K_n)$是有限集, 从而存在 $x\in N^\omega$ 使得每一$\pi_n(x)\in N\setminus\pi_n(K_n)$, 因此 $x\notin\bigcup_{n\in N} K_n$, 矛盾. 故至多有限个 X_i 不是紧空间.

反之, 设所有的X_i是局部k_ω空间, 并且至多只有有限个X_i不是紧空间. 为证明$\prod_{i\in N} X_i$是局部 k_ω 空间, 只须证若 X, Y 是 k_ω 空间, 则 X×Y 是 k_ω 空间. 设 X, Y 分别关于紧子集族$\langle X_n\rangle$

和$\langle Y_n\rangle$具有弱拓扑. 不妨设每一$X_n \subset X_{n+1}$, $Y_n \subset Y_{n+1}$, 往证$X\times Y$关于紧子集族$<X_n \times Y_n>$具有弱拓扑. 对于$X\times Y$的子集W, 设每一$W\cap(X_n \times Y_n)$是$X_n \times Y_n$的开子集, 任取$(x, y)\in W$, 不妨设$x\in X_1$, $y\in Y_1$, 对于每一$n\in N$, 由归纳法, 可构造x在X_n中的开邻域V_n, y在Y_n中的开邻域U_n满足$cl(V_n)\subset V_{n+1}$, $cl(U_n)\subset U_{n+1}$且$cl(V_n)\times cl(U_n)\subset W$. 令$V=\bigcup_{n\in N} V_n$, $U=\bigcup_{n\in N} U_n$, 那么V与U分别是x和y在X和Y中的开邻域且$V\times U\subset W$. 因而W是$X\times Y$的开子集, 故$X\times Y$关于$<X_n \times Y_n>$具有弱拓扑, 所以$X\times Y$是k_ω空间. ▌

引理 1.4.6 设$\mathcal{P}$是空间X的子集族, 那么

(1) 若$\mathcal{P}$是X的弱基, 则$\mathcal{P}$是X的sn网.

(2) 若$\mathcal{P}$是序列空间X的sn网, 则$\mathcal{P}$是X的弱基.

证明. (1) 设$\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$是空间X的弱基, 我们只须证明每一$\mathcal{P}_x$的元是x在X中的序列邻域. 对于$P\in\mathcal{P}_x$, 若存在$X\setminus P$中的序列$\{x_n\}$收敛于x, 令$U=X\setminus\langle x_n\rangle$, 则U不是X的开子集. 另一方面, 对于每一$z\in U$, 若$z=x$, 则$P\subset U$, 若$z\neq x$, 则$z\in X\setminus[x_n]$, 于是有$Q\in\mathcal{P}_z$使得$Q\subset X\setminus[x_n]$, 从而U是X的开子集, 矛盾. 这表明P是x在X中的序列邻域.

(2) 设$\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$是序列空间X的sn网. 若$G\subset X$使得对于每一$x\in G$存在$P\in\mathcal{P}_x$, 有$P\subset G$, 那么G是G中每一点的序列邻域, 于是G是X的序列开集, 从而G是X的开子集, 故每一$\mathcal{P}_x$是x在X中的弱邻域基, 所以$\mathcal{P}$是X的弱基. ▌

由引理1.4.6易验证, 对于空间X的覆盖, 基$\Rightarrow$弱基$\Rightarrow$sn网$\Rightarrow$cs网$\Rightarrow$cs*网. gf可数(第一可数)空间等价于snf可数(sof可数)的序列空间.

引理 1.4.7 空间X是Fréchet空间当且仅当X的每一点的序列邻域是该点的邻域.

证明. 设空间X是Fréchet空间, U是X中某点x的序列邻域, 若$x\in X\setminus int(U)$, 则存在$X\setminus U$中的序列$\{x_n\}$收敛于x, 这与U是x的序列邻域相矛盾, 所以U是x在X中的邻域. 反之, 设X的每一点的序列邻域是该点在X中的邻域, 若X不是Fréchet空间, 则存在X的子集A和$x\in cl(A)$使得A中没有序列收敛于x, 于是$X\setminus A$是x的序列邻域, 从而$X\setminus A$是x在X中的邻域, 即$x\in int(X\setminus A)=X\setminus cl(A)$, 矛盾, 故X是Fréchet空间. ▌

推论 1.4.8 (1) 空间 X 是第一可数空间当且仅当 X 是 snf 可数的 Fréchet 空间.

(2) 空间 X 是半度量空间当且仅当 X 是对称度量的 Fréchet 空间. ∎

为进一步说明序列空间的性质, 我们定义序列闭包拓扑空间.

定义 1.4.9(Franklin[1967]) 每一空间(X, τ)可重新定义一拓扑 σ_τ: O $\in \sigma_\tau$ 当且仅当 O 是(X, τ)的序列开集. 空间(X, σ_τ)称为(X, τ)的序列闭包拓扑空间, 简记为 σ X.

显然, σ X 是序列空间, X 和 σ X 有相同的收敛序列, X 与 σ X 中的同一点有相同的序列邻域. 对于空间 X 及 A $\subset$ X, 记

cl_σ(A)=$\mathrm{cl}_{\sigma X}$(A).

cl_s(A)={x $\in$ X: 存在 A 中的序列收敛于 x}.

int_s(A)=X $\setminus$ cl_s(X $\setminus$ A).

引理 1.4.10 对于空间 X 及 A $\subset$ X, A 是 x 在 X 中的序列邻域当且仅当 x $\in$ int_s(A).

证明. 设 A 是 x 在 X 中的序列邻域, 若 x $\notin$ int_s(A), 那么 x $\in$ cl_s(X $\setminus$ A), 于是存在 X $\setminus$ A 中的序列收敛于 x, 这与 A 的假设相矛盾. 反之, 设 A 不是 x 在 X 中的序列邻域, 那么存在 X $\setminus$ A 中的序列收敛于 x, 从而 x $\in$ cl_s(X $\setminus$ A), 故 x $\notin$ int_s(A). ∎

引理 1.4.11 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) σ X 是 Fréchet 空间.

(2) 对于每一 A $\subset$ X, cl_σ(A)=cl_s(A).

(3) 对于每一 A $\subset$ X, cl_s(A)是 X 的序列闭集.

(4) 对于每一 A $\subset$ X, int_s(A)是 X 的序列开集.

证明. 由定义 1.4.9, (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4). (4) $\Rightarrow$ (1). 设 A 是点 x 在 σ X 中的序列邻域, 则 A 是 x 在 X 中的序列邻域, 于是 x $\in$ int_s(A), 而 int_s(A)是 σ X 的开子集. 由引理 1.4.7, σ X 是 Fréchet 空间. ∎

引理 1.4.12 空间 X 是强 Fréchet 空间当且仅当 X 是 Fréchet 的 α_4 空间.

证明. 显然，强 Fréchet 空间是Fréchet 的α_4空间．反之，若X 是 Fréchet 的α_4空间，设$\{A_n\}$是X中递减的集列$\{A_n\}$且$x\in\bigcap_{n\in N}\mathrm{cl}(A_n)$，对于每一$n\in N$，存在由$A_n$中点组成的序列$\{x_{nm}\}_m$收敛于 x，不妨设 x 及$x_{nm}$的各项是两两互不相同的，令$F=\{x\}\cup\{x_{nm}: n, m\in N\}$，则 F 是 X 在 x 的扇．因为 X 是$\alpha_4$空间，于是 F 有对角收敛于 x，又因为集列$\{A_n\}$是递减的，存在 X 中收敛于 x 的序列$\{x_n\}$使得每一$x_n\in A_n$，从而 X 是强 Fréchet 空间．■

定理 1.4.13　对于空间 X，下述条件相互等价:

(1) σX 是 gf 可数空间.

(2) X 是 snf 可数空间.

(3) X 是 csf 可数的α_4空间.

证明. (1)$\Rightarrow$(3)是显然的.

(3)$\Rightarrow$(2)．设 X 是 csf 可数的α_4空间．对于每一$x\in X$，让$\mathcal{P}_x$是 x 在 X 中可数的 cs 网．对于任一$x\in U\in\tau$，置

$$\mathcal{F}_x=\{\cup\mathcal{P}'_x:\mathcal{P}'_x\in\mathcal{P}_x^{<\omega}\text{ 且}\cup\mathcal{P}'_x\text{是 x 在 X 中的序列邻域}\}.$$

则$\mathcal{F}_x$是可数的．如果$\mathcal{F}_x$不是 x 在 X 中的网，那么存在 X 的开子集 G 使得$x\in G$且对于每一$F\in\mathcal{F}_x$有$F\not\subset G$．记

$$\{P\in\mathcal{P}_x: P\subset G\}=\langle P_i\rangle,\ F_n=\bigcup_{i\le n}P_i,\ n\in N.$$

则每一F_n不是 x 在 X 中的序列邻域．因为$\mathcal{P}_x$是 x 在 X 中的 cs 网，对于每一$i\in N$，存在 X 中收敛于 x 的序列T_i和$n_i\in N$使得$T_i\subset P_{n_{i+1}}\setminus F_{n_i}$且$n_{i+1}>n_i$．置$T=\{x\}\cup(\bigcup_{i\in N}T_i)$．那么 T 是 x 在 X 的扇．因为 X 是$\alpha_4$空间, T 有对角$\{x_k\}$收敛于 x，于是存在$i\in N$使得$P_i$含有$\{x_k\}$的子序列$\{x_{k_m}\}$，从而存在$m, j\in N$使得$j\ge i$且$x_{k_m}\in T_j$，因此, $x_{k_m}\in P_i\cap(X\setminus F_{n_j})=\varnothing$，矛盾．故$\mathcal{F}_x$中的元的有限交的全体是 x 在 X 中的可数的 sn 网，从而 X 是 snf 可数空间.

(2)$\Rightarrow$(1)．设 X 是 snf 可数空间．对于每一$x\in X$，设$\{P_n\}$是 X 在 x 的递减的 sn 网．显然，每一P_n是σX在 x 的序列邻域．若 G 是 x 在 X 中的序列邻域，如果每一$P_n\not\subset G$，则存在序列$\{p_n\}$

使得每一$p_n \in P_n \setminus G$, 于是$\{p_n\}$在X中收敛于x, 从而$\{p_n\}$是终于G的, 矛盾. 因此, 存在$n\in N$使得$P_n \subset G$. 这说明$\{P_n\}$是σX在x的sn网, 所以σX是snf可数的序列空间, 即σX是gf可数空间. ▮

下面介绍正则化拓扑空间.

定义 1.4.14(Nogura, Shibakov[1995]) 对于空间(X, τ)及 $x_0 \in X$ 可重新定义拓扑τ^*如下: 对于$x\neq x_0$, $\{x\}\in \tau^*$, x_0的邻域基取为原拓扑τ在X中的邻域基. 称空间(X, τ^*)为(X, τ)在x_0的正则化拓扑空间.

引理 1.4.15 设空间(X, τ^*)是空间(X, τ)在x_0的正则化拓扑空间, 那么

(1) (X, τ^*)是正则空间.

(2) 若(X, τ)是α_4空间, 则(X, τ^*)是α_4空间.

(3) 若(X, τ)是强 Fréchet 空间, 则(X, τ^*)是强 Fréchet 空间.

证明. 易验证, (X, τ^*)是正则空间.

若(X, τ)是α_4空间, 如果$x\in X$且F是(X, τ^*)在x的扇, 那么$x=x_0$. 由于τ与τ^*在x_0有相同的收敛序列, 于是F在(X, τ^*)中有对角收敛于x, 故(X, τ^*)是α_4空间.

若(X, τ)是强Fréchet空间, 如果$\{A_n\}$是X中递减的子集列且$x\in \bigcap_{n\in N} \mathrm{cl}_{\tau^*}(A_n)$, 若$x\neq x_0$, 则 $x\in \bigcap_{n\in N} A_n$, 取每一 $x_n=x\in A_n$, 这时序列$\{x_n\}$在(X, τ^*)中收敛于 x; 若 $x=x_0$, 则$x\in \bigcap_{n\in N} \mathrm{cl}_{\tau}(A_n)$, 于是存在 $x_n \in A_n$使得序列$\{x_n\}$在(X, τ)中收敛于 x, 从而$\{x_n\}$在(X, τ^*)中也收敛于x. 所以(X, τ^*)是强 Fréchet 空间. ▮

1.5 例

本节例举几个典型的例子说明一些空间类的不蕴含关系, 这些例子的大部分已在林寿[1995]介绍过. 为了叙述的简明起见, 我们引用了后几章中的一些结果. 对于完全正则空间 X, βX 是X的 Stone-Čech 紧化. 当X是离散空间时, βX不存在非平凡的收敛序列(Engelking[1977]).

例 1.5.1 林寿[1995]的例 1.8.6 和例 2.9.26: Arens 空间 S_2.

(1) S_2是没有对角的梳, S_2是具有可数弱基的正则空间.

(2) S_2不是 Fréchet 空间.

(3) S_2是可分度量空间的 1 序列覆盖的商紧映象, S_ω是 S_2的完备映象. ▮

例 1.5.2 林寿[1995]的例 1.8.7、命题 2.7.21 和命题 3.8.22: 扇空间 S_α.

(1) S_α是度量空间的闭映射, 于是 S_α是Fréchet空间, 但是 S_α不是强 Fréchet 空间, 不是 snf 可数空间.

(2) S_ω是没有对角的扇, S_ω是$\aleph_0$空间.

(3) S_{ω_1}不具有点可数 cs*网.

(4) $(S_{\omega_1})^2$不是 k 空间 ▮

例 1.5.3 林寿[1995]的例 1.8.4: Gillman-Jerison 空间ψ(D).

设 D 是无限集. D 的可数无限子集的族$\mathcal{A}$称为几乎互不相交的, 若$\mathcal{A}$中任两不同元之交为有限集. 设$\mathcal{A}$是 D 的极大几乎互不相交族, 则$\mathcal{A}$是不可数的. 否则, 记$\mathcal{A}$=<A_i>, 取 D 的可数无限子集 E 使得对于每一 $i\in N$ 有$|E\cap A_i|=1$, 那么 $E\notin\mathcal{A}$ 且 $\mathcal{A}\cup\{E\}$是几乎互不相交族, 矛盾. 置$\psi(D)=\mathcal{A}\cup D$, 具有下述拓扑的空间$\psi$(D)称为 Gillman-Jerison 空间: D 中的点取为ψ(D)的孤立点, 而对于 $A\in\mathcal{A}$, A 在ψ(D)中的邻域基取为$\{\{A\}\cup(A\setminus F):F\in A^{<\omega}\}$, 则$\psi$(D)是局部紧空间, 而$\psi$(N)是可展空间.

让 $f:\psi(N)\to S_1$使得 $f(\mathcal{A})=\{0\}$且 $f(n)=1/n$, 那么 f 是闭映射. 若 f 是紧覆盖映射, 则存在ψ(N)的紧子集 K 使得 $f(K)=S_1$, 于是 $N\subset K$, 从而 $K=\psi(N)$, 矛盾. 故 f 不是紧覆盖映射.

下面通过ψ(N)构造两个新的空间. 让 $X=\psi(N)\cup\{a\}$是ψ(N)的单点紧化, 则 X 是紧的序列空间, 且不含有子空间同胚于 S_2和 S_ω. 任取$\mathcal{A}$的无限子集$\mathcal{A}'$=<A_n>, 由于在ψ(N)中$\mathcal{A}$是闭离散子集, 所以序列$\{A_n\}$在 X 中收敛于 a. 对于每一 $n\in N$, 置 A_n=<a_{nm}>, 那么在ψ(N)中序列$\{a_{nm}\}_m$收敛于 A_n. 让 $M=\{a\}\cup\mathcal{A}'\cup\{a_{nm}: n, m\in N\}$, 则 M 具有可数的 sn 网. 因为$\{a_{nm}\}$的任一子序列在 X 中都不收敛于 a, 所以$\sigma$M 同胚于 S_2.

取 $Y=X/\mathcal{A}$, 让 $f:X\to Y$ 是自然商映射, 那么 Y 是紧的序列空间, 且不含有子空间同胚于 S_2 和 S_ω. 令 T=f(M), 那么 T 有可数的 cs 网且σ T 同胚于 S_ω. ■

例 1.5.4 林寿[1995]的例 2.8.16: 存在局部紧的度量空间 M 和紧覆盖, 1 序列覆盖, 商, 有限到一映射 $f:M\to X$ 使得

(1) X 是可分的正则空间.

(2) X 具有点可数弱基.

(3) X 不是亚 Lindelöf 空间.

(4) X 不具有紧可数 k 网.

定义 $X=I\times S_1$, $Y=I\times(S_1\setminus\{0\})$, 集合 X 赋予下述拓扑: Y 作为 X 的子空间具有通常的欧氏拓扑. 对于$(t, 0)\in X$ 的邻域基元具有形式: $\{(t, 0)\}\cup(\bigcup_{k\ge n}V(t, k))$, $n\in N$, 其中 V(t, k)是点(t, 1/k)在欧氏子空间 $I\times\{1/k\}$中的开邻域. 置 $M=(\oplus_{n\in N}I\times\{1/n\})\oplus(\oplus_{t\in I}\{t\}\times S_1)$, 那么 M 是局部紧的度量空间, 让 f 是从 M 到 X 上的自然映射, 则 f 是紧覆盖的商有限到一映射. 显然, X 是可分的正则空间. 易验证, X 具有点可数弱基. 由于可分的亚 Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间, 而 X 不是 Lindelöf 空间, 所以 X 不是亚 Lindelöf 空间.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的紧可数 k 网. 置 $\mathcal{F}=\{\{(t, 0)\}: t\in I\}\cup\{P\cap Y: P\in\mathcal{P}\}$. 由于 $I\times\{0\}$是 X 的闭离散子空间, 于是 $\mathcal{F}$ 是 X 的 k 网. 而 Y 是 X 的σ 紧子空间, 所以$\{P\cap Y: P\in\mathcal{P}\}$是可数的, 因此 $\mathcal{F}$ 是星可数的. 由推论 5.2.4, X 是 Lindelöf 空间, 矛盾. 故 X 不具有紧可数 k 网. ■

空间 X 称为可数亚紧空间, 若 X 的每一可数的开覆盖存在点有限的开加细. 我们引用 Ishikawa[1955]的可数亚紧空间的下述刻画: 若$\{C_n\}$是空间 X 的递减的闭子集列且$\bigcap_{n\in N}C_n=\varnothing$, 则存在 X 的开子集列$\{U_n\}$使得每一 $C_n\subset U_n$ 且$\bigcap_{n\in N}U_n=\varnothing$

例 1.5.5 Sakai[1997b]的例 2: 存在局部可数的正则空间 X 使得 X 的所有紧子集是有限集, 但是 X 不是可数亚紧空间.

设 D 是基数为 2^ω 的子集, 赋予 D 离散拓扑. 让$\{P_\alpha: \alpha<2^\omega\}$是 D 的可数无限子集的几乎互不相交族使得对于 D 的每一不可数子集 P 存在$\alpha<2^\omega$ 有 $P_\alpha\subset P$. 这种集族的存在可见 Blacar, Simon[1989]的例 4.2. 对于每一$\alpha<2^\omega$, 让$\langle P_{\alpha n}\rangle$是 P_α 的无限子集的互不相交族. 令 $\mathcal{P}=\{P_{\alpha n}$:

$\alpha<2^{\omega}$, $n\in N\}$. 对于每一$\alpha<2^{\omega}$和 $n\in N$, 记 $P^{*}_{\alpha n}=\mathrm{cl}_{\beta D}P_{\alpha n}\setminus P_{\alpha n}$, 取定点 $p_{\alpha n}\in P^{*}_{\alpha n}$. 让 $X=D\cup\{p_{\alpha n}:\alpha<2^{\omega}, n\in N\}$, 集合 X 被赋予 βD 的子空间拓扑, 则 X 是正则空间. 因为 $\mathcal{P}$ 是几乎互不相交的, $X\setminus D$ 是 X 的闭离散子空间. 易验证, X 是局部可数空间且 X 的每一紧子集是有限的.

我们证明 X 不是可数亚紧空间. 对于每一$n\in N$, 让 $C_n=\{p_{\alpha k}:\alpha<2^{\omega}, k\geq n\}$, 那么每一 C_n 是 X 的闭子集且$\bigcap_{n\in N}C_n=\varnothing$. 若存在开集 $U_n\supset C_n$ 使得$\bigcap_{n\in N}U_n=\varnothing$, 因为 D 是不可数的, 存在 $n\in N$ 使得 $D\setminus U_n$ 是不可数的, 于是存在$\alpha<2^{\omega}$使得 $P_{\alpha}\subset D\setminus U_n$, 从而 $p_{\alpha n}\in C_n\cap \mathrm{cl}(D\setminus U_n)=\varnothing$, 矛盾. 故 X 不是可数亚紧空间. ∎

例 1.5.6 林寿[1995]的例 2.9.27: 存在局部紧度量空间 Z 以及紧覆盖的商有限到一映射 $f:Z\to X$, 完备映射 $g:X\to Y$ 具有下述性质

(1) X 是具有点可数闭 k 网的正则空间.

(2) X 不具有点可数 cs 网.

(3) X 不是局部可分空间.

(4) Y 含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

对于 $x\in I$, 设 S_x 同胚于 S_1, 置 $Z=I\oplus(\oplus_{x\in I}S_x)$, 则 Z 是局部紧的度量空间. 让 X 是将每一 $x\in I$ 与 S_x 的极限点贴合成一点得到的商空间, 用 f 表示这个商映射, 则 f 是有限到一的紧覆盖映射. 将 X 的紧子集 I 贴合成一点得到的商空间记为 Y, 用 g 表示这个商映射, 则 g 是完备映射. 这时 X 是具有点可数闭 k 网的正则空间, 但是 X 不具有点可数 cs 网, X 不是局部可分空间. Y 含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

我们介绍刘川和 Tanaka[1996a]构造的上述空间 X 的一般化. 设 M 是度量空间. 对于每一 $x\in M$, 让 T_x 是收敛于 x 的序列使得 $T_x\cap M=\varnothing$ 且这些 T_x 是两两互不相交的. 令 $S_x=T_x\cup\{x\}$. 置 $X_M=M\cup(\bigcup_{x\in M}T_x)$并且 X_M 关于$\{M\}\cup\{S_x:x\in M\}$具有弱拓扑, 于是 X_M 由空间族$\{M\cup T_x:x\in M\}$控制, X_M 是度量空间 $M\oplus(\oplus_{x\in M}S_x)$的商, 有限到一映象. ∎

例 1.5.7 林寿[1995]的例 1.8.8: Michael 空间.

取定 $p\in \beta N\setminus N$, 令 $X=N\cup\{p\}$. 集合 X 赋予 βN 的子空间拓扑称为 Michael 空间. 显然, X 是所有紧子集为有限集的正则空间, 于是 X 是 $\aleph_0$ 空间, 但是 X 不是 k 空间. ▇

例 1.5.8 林寿[1999b]的例 4.3 和 Steen, Seebach[1978]的例 78: 半园盘拓扑空间 X.

(1) X 不是正则空间.

(2) X 是可展空间.

(3) X 不是亚 Lindelöf 空间.

(4) X 不具有点可数的 cs*网.

(5) X 具有局部可数且 σ 离散的 k 网.

记 τ 是平面 R^2 的欧氏拓扑, $S=\{(x, y) : x, y\in R, y>0\}$, $L=\{(x, 0) : x\in R\}$ 且 $X=S\cup L$. 在 X 上赋予半园盘拓扑 $\tau^*=\tau_{|X}\cup\{\{x\}\cup(S\cap U) : x\in L, U\in\tau\}$, 称 (X, τ^*)为半园盘拓扑空间, 则 X 是 T_2, 非正则, 可分, 非 Lindelöf, 第一可数空间(Steen, Seebach[1978]). 利用 R^2 的球形邻域易验证 X 是可展空间. 由于可分的亚 Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间, 所以 X 不是亚 Lindelöf 空间, 从而 X 不具有点可数基, 由推论 2.1.7(1)知 X 不具有点可数的 cs*网. 所以(1)~(4)成立.

置 $\mathcal{P}=\{\{p\} : p\in L\}\cup\{B(q, 1/n)\cap S : q$ 的两个坐标均是有理数, $n\in N\}$. 由于 L 是 X 的闭离散子空间, 所以 $\mathcal{P}$ 是 X 的局部可数且 σ 离散的集族, 往证它是 X 的 k 网. 由引理 2.1.6, 只须证 $\mathcal{P}$ 满足: 若 X 中的序列$\{z_n\}$收敛于 $z\in U\in\tau^*$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $P\subset U$ 且 P 含有$\{z_n\}$的无限项. 不妨设所有的 $z_n\in S$, 则在欧氏拓扑中序列$\{z_n\}$仍收敛于 z, 于是存在两个坐标均是有理数的点 q 和 $k, m\in N$ 使得$\{z_n : n\geq k\}\subset B(q, 1/m)\cap S\subset U$. 因此 $\mathcal{P}$ 是 X 的 k 网. 故 X 具有局部可数且 σ 离散的 k 网, 所以(5)成立. ▇