华夏英才基金学术文库

点可数覆盖与序列覆盖映射

林　　寿　著

内容简介

本书以点可数覆盖为线索，利用映射的一般方法对用覆盖或网络来定义的许多广义度量空间类进行了系统的研究，是作者及其合作者关于一般拓扑学的一部专著. 内容包括点可数覆盖，点有限覆盖列，遗传闭包保持覆盖与星可数覆盖等.

本书论述严谨，自成系统，只要具有一般拓扑学的基础知识就能阅读本书，并进入研究的前沿.

读者对象为大专院校数学系师生、研究生和数学工作者.

A Foreword

The notions of metrizability and compactness are at the center of general topology. This is so from historical point of view: general topology developed around these notions. This is also so if we look at the structure of general topology today. Compactness is defined in terms of open coverings. It turned out, after the classic work of P. S. Alexandroff, P. S. Urysohn, F. B. Jones, A. H. Stone, R. H. Bing, J. Nagata, and Ju. M. Smirnov, that metrizability can be also characterized in terms of sequences of open coverings. Nowadays it is widely recognized that the method of systems of coverings is one of the maim tools for classifying spaces. Many most important classes of spaces were introduced using natural covering structures which find their origins in metrizable spaces. In fifties and sixties it was discovered that systems of coverings can be used very effectively to construct some natural mappings of metrizable spaces onto spaces admitting such systems of coverings (K. Nagami, V. I. Ponomarev, A. Okuyama, A. Arhangel'skii). This method led to mutual classification of spaces and mappings based on the interaction of systems of coverings and mappings(see [Arhangel'skii, 1966]).

This monograph contains a systematic study of classes of generalized metric spaces on the basis of coverings and networks, in combination with the general method of mappings. It presents the modern state of the mutual classification of spaces and mappings, one of central domains of general topology. The author, professor Shou Lin, and his collaborators and colleagues, first of all, from China(Chuan Liu, Pengfei Yan, Mumin Dai) and Japan(K. Nagami, Y. Tanaka, T. Hoshina), made major contributions to this theory with important, and often quite unexpected, results.

An important feature of the book is that it may serve as a systematic source of information on classification of classes of mappings and on methods used to construct mappings with special combinations of properties. This direction of research is not sufficiently well covered in the existing textbooks and this monograph will be especially valuable in this connection. However, the book will be very useful to all general topologists, even to those who are working on very different problems, and to graduate students in general topology with various interests. Indeed, the monograph provides an interesting and upto date introduction to metrizability and to classes of generalized metric spaces. It introduced basic classes of mappings, in particular, quotient mappings, compact covering mappings and to various generalizations of those. These notions are of very fundamental nature.

Another notion of fundamental nature, studied and applied systematically in the monograph, is the notion of network introduced in 1959. A family $\mathcal{S}$ of subsets of a topological space X is called a network of X if every open subset is the union of a subfamily of $\mathcal{S}$. The networks were used in [Arhangel'skii, 1959] to distinguish the spaces with a countable network. It was observed in [Arhangel'skii, 1959] that every continuous image of a separable metric space has a countable network, and it was also established in [Arhangel'skii, 1959] that every compact Hausdorff space with a countable network has a countable base(and is therefore metrizable). From these statements it follows that if a compact Hausdorff space Y is a continuous image of a separable metrizable space, then Y is metrizable. This theorem from [Arhangel'skii, 1959] is one of the first and typical results in the general theory of spaces and mappings the modern state of which is presented in this monograph. It turned out that networks are much more subtle, more flexible structures than bases, which are "too nice formations". It is through various, often ingenious, combinations of restrictions on networks that most important classes of generalized metric spaces are introduced and studied. One of such classes was defined by E. Michael, using the concept of k-network[Michael, 1966], which is really central in the monograph.

Though reading the monograph does no require much special background, the exposition in it goes far beyond the elementary level. It contains a rich collection of deep and beautiful results of highest professional level. Theorem 2.1.9, Corollary 2.1.11, and Theorems 2.2.5, 2.2.10, 2.3.11, 2.3.13 and Theorem 2.5.10 can serve as examples of such excellent results. In particular, these theorems provide sufficient conditions for a mapping to be compact covering and sufficient conditions for a space to be a quotient space of a metric space with separable fibres.

The book not only brings the reader to the very first line of investigations in the theory of generalized metric spaces, it contains many intriguing and important unsolved problems, some of them old and some new. Here is one of the open problems, a very natural one. Suppose Y is a quotient space of a metrizable space, with compact fibres. Suppose further that Y is regular. Is then every point in Y an intersection of a countable family of open sets? This book provides all background and information needed to start to work on this and similar problems. So the monograph will be equally interesting and useful for an expert and for a graduate student.

I would like to mention another joyful aspect of this monograph. Its appearance marks the success of a long period of development of general topology in China, it brings to the light important contributions to the mainstream of general topology made by a very creative group of Chinese mathematicians.

Congratulations to the author and to the readers with the book!

A. V. Arhangel'skii

前　　言

空间与映射的理论是一般拓扑学的重要组成部分．著作《广义度量空间与映射》(科学出版社，林寿[1995])用映射方法系统论述了广义度量空间的基本理论，总结了 20 世纪 60 年代至 90 年代初一般拓扑学的重要研究成果．广义度量理论与覆盖性质理论中的许多问题涉及点可数覆盖的研究. 20 世纪 90 年代一般拓扑学的发展动力之一是专著《Open Problems in Topology》(North-Holland, van Mill, Reed[1990])中的问题，其中的一些问题涉及具有点可数基空间与度量空间的紧覆盖映射，引导了一批拓扑学名家对点可数覆盖及相关映射理论的兴趣，促进了 k 网理论与度量空间映射理论的发展，许多优秀的结果不断涌现．因此，总结这 10 年国际上广义度量空间

理论的成果，反映我国学者在该领域的贡献，引导更多的年青数学工作者投身于该领域的工作是十分迫切和非常必要的.

除一些熟知的点集拓扑学知识与引用《广义度量空间与映射》和集论拓扑学中的几个结果外，本书的证明基本上是封闭的，一些较为复杂的例子也给出了详细的构造. 特别地，无需假设读者已阅读过《广义度量空间与映射》. 本书由五章及 300 多篇文献组成. 第一章简要综述了 20 世纪 90 年代的广义度量空间理论，包含了它的主要研究课题、国内外学者的重要贡献，同时作为预备章也介绍了一些基本概念、相关的命题及例子. 第二章介绍了点可数覆盖与度量空间的 s 映射理论，用特殊的商空间刻画了具有点可数基的空间，建立了度量空间的商 s 映象与由 k 网、序列网、cs 网、sn 网和 cfp 网等集族确定的点可数集族之间的精确关系. 第三章介绍了点有限覆盖列与度量空间的 π 映射、紧映射理论，发展了点正则覆盖的方法，阐述了度量空间上序列覆盖映射与 1 序列覆盖映射的联系. 第四章介绍了遗传闭包保持覆盖、控制族与度量空间的闭映射理论，揭示了这些空间类的一些覆盖性质. 第五章介绍了星可数覆盖与局部可分度量空间的商映射理论，突出了具有星可数 k 网空间在研究局部可分度量空间映象中的地位，列举了点可数覆盖在探讨度量空间的闭映象和乘积空间的 k 空间性质中的作用.

受高国士教授十多年的教导，近年来作者在广义度量空间理论方面做过一些探索性的研究，尤其偏爱空间与映射方面的课题. 广义度量空间理论从 20 世纪 60 年代起在国际上蓬勃发展，各个不同时期均不断有名家与名作涌现，作者的工作受 A. Arhangel’skii, L. Foged, G. Gruenhage, E. Michael 和 Y. Tanaka 等的影响较大. 尽管本书与《广义度量空间与映射》同属于广义度量空间理论，作者无意写一本关于空间与映射方向的手册，仅试图把它作为《广义度量空间与映射》的姐妹篇，以点可数覆盖为线索，借助序列覆盖映射理论，反映 20 世纪 90 年代广义度量空间研究中引人入胜的一个侧面. 本书的大部分内容取材于作者的博士学位论文(林寿[2000a]，导师周友成教授)，同时包含了作者及国内外学者 1992 年以来的一些相关工作. 感谢高国士教授、刘应明教授(中科院院士)、林群研究员(中科院院士)、吴利生教授、蒋继光教授、戴牧民教授和周友成教授等前辈多年来一直给予作者的关心、指导与扶持，感谢与刘川教授、燕鹏飞教授、Y. Tanaka 教授、T. Mizokami 教授、彭良雪博士等进行富有成效的合作，感谢与恽自求教授、李进金教授、葛英副教授、李克典教授、夏省祥教授等进行有益的学术交流，感谢国家自然科学基金资助项目“点集拓扑(19476010)”、“函数空间的拓扑性质(19501023)”与“集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用”(19971048)，福建省自然科学基金资助项目“集论拓扑(A94019)”、“函数空间的拓扑性质”(A97025)与“集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用”(F00010)，福建省“百千万人才工

程”人选培养基金资助项目“广义度量空间研究”(1999)及宁德师范高等专科学校“学术带头人专项经费”等为研究工作提供的资金保证，感谢 Y. Tanaka 教授、K. Tamano 教授、J. Nagata 教授、M. Sakai 教授、A. Shibakov 博士、Y. Yajima 教授、M. Choban 教授、H. Junnila 教授、刘川教授、高智民教授、恽自求教授、师维学博士等为研究工作提供的资料保证. 感谢宁德师范高等专科学校及刘卓雄校长等师专学人 20 年来一直对作者各方面的支持. 感谢福建师范大学及数学系对作者聘任为基础数学岗位特聘教授的重视及提供优良的工作和生活环境. 本书的出版应特别感谢刘应明教授、江守礼教授和王尚志教授的热情推荐，著名拓扑学家А. В. Архангельский 教授的序及中共中央统战部华夏英才基金的支持.

作　者

2001 年 3 月 31 日于福建师范大学

目　录

第一章　绪论

拓扑学的中心课题是确定和研究拓扑不变量. Arhangel’skii(Arhangel’skii, Pontryagin[1990])指出: 一般拓扑学致力于拓扑空间及连续性的研究, 有三个主要的“内在”任务, 一是不同拓扑空间类的比较, 二是确定类的研究, 三是为上述目的及应用的需要定义出新的概念和空间类. 实现任务一的联结空间的映射的方法是特别地重要, 该方法是直接建立不同空间类之间的联系, 任务二主要涉及空间类关于运算的性质, 而覆盖的方法对完成上述任务起重要的作用.

由此可见, 映射与覆盖的方法是一般拓扑学中通用的重要工具, 通过对度量化问题、空间与映射的相互分类原则和积空间的仿紧性等一般拓扑学中重要课题的研究, 导致了广义度量空间理论的建立(Burke, Lutzer[1976]). 什么是广义度量空间？ 或许, 任何推广了可度量性的拓扑性质都可以称为广义度量性质. 然而, 这种说明过于广泛, 适当的限制更为有利于探索可度量性的本质. 粗略地说, 广义度量空间是这样的一些空间类(Gruenhage[1984], Hodel[1998]), 有益于刻画可度量性, 继承了度量空间的许多优美性质且度量空间的某些理论或技巧能拓广到这些空间类, 如是否关于完备映射或闭映射保持? 是否关于子空间或闭子空间遗传? 是否关于有限积或可数积封闭? 是否具有一定的可和性? 是否具有某种的覆盖性质? Hodel[1998]指出: 有许多的理由说明为什么广义度量空间是值得研究的, 或许最重要的理由是这些空间类增加了我们对于度

量空间的理解, 此外, 拓扑学家正不断地寻找更广泛的空间类使得一些特别重要的结果成立. 正因为如此, 从 20 世纪 60 年代起广义度量空间理论一直是一般拓扑学中活跃的研究方向, 所涉及的与公理集合论、数理逻辑、组合数学、泛函分析、拓扑群、动力系统等分支相互交融而形成的大量问题已列入专著《Open Problems in Topology》(van Mill, Reed[1990]). 1960 年至 2000 年间在不同时期内所取得的广义度量空间理论的成就已先后总结在一些重要的论著中, 如 Arhangel'skii[1966]; Burke, Lutzer[1976]; 高国士[2000]; Gruenhage[1984, 1992]; Hodel[1998]; Kodama, Nagami[1974]; 林寿[1995]; Morita, Nagata[1989]. 许多知名学者不断提出大量有挑战性的问题, 汇同一些长期未解决的经典问题成为广义度量空间理论进一步向前发展的源泉. 恰如 Hodel[1998]在总结了广义度量空间理论的阶段性结果后说: "More important perhaps is the fact that the study of generalized metrizable spaces is by no means complete; rather, it continues to grow with many new and impotrant results appearing every year."

1.1　20 世纪 90 年代的广义度量空间理论

什么是20世纪90年代广义度量空间理论的主要研究课题? 我们不妨来看一看这一时期国际上出版的几部拓扑学论著及两次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集中关于广义度量空间理论方面的论题.

1990 年由 van Mill 和 Reed[1990]主编的《Open Problems in Topology》在所列举的 1100 个问题中属于广义度量空间方面的问题大至有

(1.1) 度量化问题与正规 Moore空间问题(问题36至41, 79至84, 98, 298至315, 348, 376, 1049, 1056).

(1.2) 点可数基空间及相关问题(问题 120, 313, 320, 322, 366, 375 至 380).

(1.3) M_i 空间问题(问题 321).

(1.4) cosmic 空间问题(问题 199).

(1.5) MOBI 类问题(问题 362 至 372).

(1.6) 紧覆盖映射问题(问题 392 至 394).

(1.7) 单调正规空间问题(问题 381).

1992 年在 Hušek 和 van Mill[1992]主编的《Recent Progress in General Topology》(第 7 次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集)中由 Gruenhage[1992]撰写的"Generalized metric spaces and metrization"总结了 1984 年以来在广义度量空间与度量化方面的重要成果, 主要论题有

(2.1) 对称度量空间.

(2.2) 点可数基空间.

(2.3) 单调正规空间与 M_i 空间.

(2.4) Moore 空间、可展空间与严格 p 空间.

(2.5) MOBI 类.

(2.6) Lašnev 空间、cosmic 空间与 k 网.

(2.7) Tychonoff 积与 Σ 积的正规性.

1997 年 Arhangel'skii[1997]在纪念 Alexandroff 诞辰 100 周年的报告"Some recent advances and open problems in general topology"中论述了在过去的 5 至 7 年来作者感兴趣的度量化、映射理论和函数空间理论方面的成果与问题, 所涉及的广义度量空间方面的课题有

(3.1) 点可数基空间与度量化.

(3.2) 具有 G_δ 对角线的空间与可展空间.

(3.3) cosmic 空间与 $\aleph_0$ 空间.

(3.4) 一对一映射与次可度量空间.

(3.5) 紧覆盖映射与诱导完备映射.

1997 年在 Aull 和 Lowen[1997]主编的《Handbook of the History of General Topology, V1》中由 Nagata[1997b]撰写的"The flowering of general topology in Japan"和 Nagata[1997a]撰写的"Recent progress of general topology in Japan"中自 20 世纪 90 年代以来日本在广义度量空间方面的主要工作涉及

(4.1) 度量空间的分解空间及其度量化.

(4.2) Lašnev 空间与 k 网理论.

(4.3) 具有广义度量因子 Σ 积的正规性.

(4.4) 广义度量空间的万有(universal)空间.

1998 年由 Hušek[1998]编辑的第 8 次布拉格国际拓扑学学术讨论会论文集中在所发表的 25 篇特邀报告中有 6 篇是广义度量空间方面的内容, 主要工作涉及

(5.1) 确定度量空间的闭映象与几乎开映象.

(5.2) 单调正规空间.

(5.3) 具有广义度量因子有限积的正规性.

在《莫斯科大学数学力学通报》1999 年第 3 期上发表的纪念 Urysohn 诞辰 100 周年的论文集中发表的 11 篇报告中有 3 篇是广义度量空间方面的内容, 主要工作涉及

(6.1) 度量化问题.

(6.2) 度量空间与映射.

(6.3) 弱第一可数性.

从以上所列课题可见, 度量化问题依然是一般拓扑学的核心问题, 广义度量空间研究的主要对象是具有点可数基的空间、Moore 空间、M_i 空间、单调正规空间、cosmic 空间、Lašnev 空间和 MOBI 类等, 主要工具是点可数覆盖、展开列、基、网、k 网、紧覆盖映射和紧映射等. 下面列举一些重要的结果, 限于篇幅在此仅能按作者的认识列举出部分的结果, 有进一步兴趣的读者可参考书末的相关文献.

关于度量化问题

定理 1.1.1 (1)(Good, Tree[1995]) (ZF)第二可数的正则空间是可度量化空间. (2)(Good, Tree, Watson[1998]) (ZF+DC)Stone 定理不成立: 存在非仿紧的度量空间.

定理 1.1.2 (1)(Balogh[1998a]) (ZFC)存在不具有拟G_δ对角线的遗传仿紧完正规的Q集空间. (2)(Balogh[1998b]) (ZFC)存在非仿紧的正规可遮空间.

定理 1.1.3(高印珠[1996], Moody[1993]) 具有一致(G)和点 G_δ 性质的空间是具有σ离散网的半层空间.

定理 1.1.4(Fearnley[1999]) 存在具有σ离散π基的 Moore 空间不能稠密地嵌入任何具有 Baire 性质的 Moore 空间.

定理 1.1.5(师维学[1999]) 存在不可度量化的紧线性序空间使其每一子空间具有σ极小基.

其中, 定理 1.1.1 回答了 Läuchli[1962]提出的问题, 定理 1.1.2 回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 57 和问题 119, 定理 1.1.3 推广了从 20 世纪 50 年代至 90 年代的一大批度量化定理, 定理 1.1.4 回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 303 及 Reed[1974]提出的问题, 定理 1.1.5 回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 376.

关于紧覆盖映射及映射的相关论题

定理 1.1.6(Debs, Raymond[1996]) 存在三商, 紧, 可数紧覆盖映射 $f:X\to Y$ 使得 X 是σ紧的度量空间, Y 是度量空间, 但是 f 不是紧覆盖映射.

定理 1.1.7(Just, Wicke[1994]) 可分度量空间到可数度量空间的可数紧覆盖映射是诱导完备

映射.

定理 1.1.8(陈怀鹏[1999]) 度量空间的商紧映象未必是度量空间的紧覆盖的商 s 映象.

定理 1.1.9(Hansell[1998]) 对于 w(X)=κ, X 是解析(analytic)度量空间当且仅当 X 是 Baire 空间κ^{ω}的闭子空间的几乎开 s 映象.

定理 1.1.10(Mizokami[1993a]) Moore 空间的第一可数的φ扩张是可展空间.

定理 1.1.11(Gruenhage[1998]) 存在 Lindelöf 的正则空间 X 使得闭映射 f:X$\rightarrow$Y 不是诱导不可约映射.

其中, 定理 1.1.6 至定理 1.1.8 分别回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 392 至问题 394, 定理1.1.10 深化了关于 Lašnev 空间度量化的系列结果, 定理 1.1.11 回答了 Ponomarev 的问题(见 van Douwen[1984]第 162 页). 关于紧覆盖映射的一些相关结果见林寿[1998a].

关于积空间

定理 1.1.12(Balogh[1996]) 存在遗传正规, σ 相对离散, 基数 c 的 Dowker 空间.

定理 1.1.13(Kemoto, Yajima[1994]) 设Σ是半层空间的Σ积. 若Σ的每一有限子积是仿紧空间, 那么Σ是正规空间当且仅当它是可数仿紧空间.

定理 1.1.14(Eda, Gruenhage, Koszmider, Tamano[1995]) (CH)Lašnev 空间 S_{ω_2} 的Σ积不是正规空间.

定理 1.1.15(Cook, Reed[1999]) (MA+$\neg$ CH)存在正规, 可分, 局部紧的 Moore 空间 X 使得 X^2 不是正规空间.

其中, 定理 1.1.14 回答了 Kodama 的问题, 定理 1.1.15 回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 299 和问题 300.

关于单调正规空间与 $\mathbf{M}_i$ 空间

定理 1.1.16(Rudin[1993]) 存在非 K_0 的循环(cyclic)单调正规空间.

定理 1.1.17(Collins[1996]; Gartside, Moody[1996]) 完备映射未必保持弹性(elastic)空间.

定理 1.1.18(Mizokami, Shimane[2000]) M_3 的 k 空间是 M_1空间.

其中, 定理 1.1.16 回答了 van Mill 和 Reed[1990]的问题 381, 定理 1.1.17 回答了 Tamano 和 Vaughan[1971]提出的问题. 定理 1.1.18 是 M_i 空间问题(即, M_3空间是否是 M_1空间)的重大进展, 该问题被 Hodel[1998]认为是广义度量空间理论中最重要的尚未解决的问题(the most important unsolved problem).

关于基、**k** 网与网

定理 1.1.19(Foged[1996]) 存在完全正则的具一致基的空间不具有点可数闭 k 网.

定理 1.1.20(Sakai[1997a]) 空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当 X 是具有由可分子集组成的点可数 k 网的 Fréchet 空间.

定理 1.1.21(Delistathis, Watson[2000]) (CH) 存在 cosmic 空间 X 使得 dim(X)=1 且 ind(X)=Ind(X)=2.

定理 1.1.22(Tkachuk[1998]) 存在连通的 cosmic 空间 X 使得 X 不是连通的可分度量空间的映象.

其中, 定理 1.1.19 回答了 Gruenhage, Michael 和 Tanaka[1984]提出的问题, 定理 1.1.21 回答了 Arhangel'skii[1966]提出的问题.

下面介绍国内学者关于广义度量空间理论的贡献. 国内较早并长期从事广义度量空间理论研究的学者当属高国士教授和高智民教授. 在 20 世纪 70 年代末至 80 年代我国学者就已在广义度量空间理论中作出不少值得称赞的成果(刘应明[1982]; 刘应明, 蒋继光[1989]). 进入 20 世纪 90 年代我国学者每年都产生了不少广义度量空间理论方面优秀的成果, 这首先得益于国家自然科学基金加大对基础研究的投入力度, 其次得益于国内学者与日本、美国、俄罗斯、加拿大、新西兰、芬兰等国学者较为广泛的合作. 据不完全统计, 1990 年至 1999 年, 四川大学、山东大学、西北大学、首都师范大学、苏州大学、广西大学、宁德师范高等专科学校等校至少主持过 16 项与广义度量空间理论相关的国家自然科学基金资助项目的研究工作, 国家自然科学基金还资助了 1993 年的苏州国际一般拓扑学学术会议、1997 年的金华国际拓扑学学术会议、1998 年的北京国际一般拓扑学学术会议以及部分学者的"国际合作与交流项目"、"资助出国参加国际学术会议项目". 这也从另一角度说明了国内关于广义度量空间理论的研究成果是极为丰富和具有相当的影响力.

在此, 我们简略报告国内学者 20 世纪 90 年代在广义度量空间理论方面一些具有一定影响或较多引用的工作. 1990 年至 1993 年恽自求(Junnila, 恽自求[1992]; 恽自求[1990, 1991, 1993])获得了 $\aleph$ 空间的系列结果, 如 Junnila 与他证明了 $\aleph$ 空间等价于不含有闭子空间同胚于 S_{ω_1} 的具有 σ 遗传闭包保持 k 网的空间. 1990 年至 1993 年滕辉(Tamano, 滕辉[1993]; 滕辉[1990a, 1990b, 1991]) 系统地探讨了广义度量空间的 Σ 积和 σ 积, 解决了 Chiba, Nagami 和 Yajima 提出的几个问题, 如证明了半层空间族的 Σ 积是集态次正规空间. 1992 年 Milner 与王尚志[1992]建立了广义序空间的

嵌入定理与度量化定理并解决了 Lutzer[1971]提出的困难问题被国际拓扑学界称为是度量化方面最有趣的结果之一. 1992 年钟宁[1992]在困难的 M_3 空间上取得了一些进展，如她得到了具有 M_3 因子的乘积空间的正规性定理. 1992 年至 1993 年高智民(高智民[1992]；高智民，Nagata[1993])证明了几个由弱基决定的空间的性质，如具有 σ 闭包保持弱基的正规空间是仿紧空间. 1993 年王延庚与王成堂[1993]研究了判断 B_r 空间的一般性方法. 1993 年至 1996 年刘川与戴牧民(刘川[1993, 1995]；刘川，戴牧民[1994, 1995, 1996])在遗传闭包保持集族、弱基及度量空间的紧覆盖 s 映象方面进行了大量的工作，尤其是证明了 g 可度量空间等价于不含有闭子空间同胚于 S_ω 的具有 σ 遗传闭包保持 k 网的 k 空间. 1994 年杨乐成[1994]建立了 Σ 积正规性的等价条件，证明了仿紧 σ 空间的 Σ 积是正规空间当且仅当它是可数仿紧空间. 1995 年林寿[1995]出版了著作《广义度量空间与映射》. 1996 年高印珠[1996]在 Collins-Reed-Roscoe-Rudin 度量化定理上取得了很精致的结果：具有一致(G)和点 G_δ 性质的空间是具有 σ 离散网的半层空间. 1996 年至 1998 年刘川与 Tanaka[1996a, 1996b, 1996c, 1998a, 1998b]在星可数 k 网及相关的紧可数 k 网、σ 点有限 k 网、局部可分度量空间的映象等方面完成了一系列系统的工作，如证明了空间 X 是局部可分度量空间的闭映象当且仅当它是具有星可数 k 网的 Fréchet 空间. 1997 年冯秀峰与 Tamano[1997]证明了可数多个 Lašnev 空间积的可数扇密度子空间是可度量空间，解决了 Arhangel'skii 和 Bella[1996]提出的问题. 1996 年至 2000 年林寿与戴牧民、刘川、Tanaka、燕鹏飞(林寿[1996a, 1996b, 1996c, 1997a, 1997b, 1997c, 1997d, 1998a, 1998b, 1998c, 1999a]；林寿，刘川[1996]；林寿，刘川，戴牧民[1997]；林寿，Tanaka[1994]；林寿，燕鹏飞[1998, 2001a, 2001b]；林寿，燕鹏飞，刘川[1999]；刘川，林寿[1997]；燕鹏飞，林寿[1999a, 1999b])在点可数覆盖及相关的序列覆盖映射、紧覆盖映射、局部可分度量空间的映象和乘积空间的 k 空间性质等方面也做了较系统的工作，如证明了度量空间的商 s 映象是具有点可数基的空间当且仅当它不含有闭子空间同胚于 S_2 和 S_ω. 1999 年师维学[1999]构造了不可度量化的紧线性序空间使其每一子空间具有 σ 极小基，否定了 Bennett 和 Lutzer[1977]在 Topology Proceedings 上提出的经典问题, 1999 年陈怀鹏[1999]构造了度量空间的商紧映象使其不是任一度量空间的紧覆盖的商 s 映象，否定了 Michael 和 Nagami[1973]提出的另一经典问题. 2000 年高国士[2000]出版了著作《拓扑空间论》.

此外，高智民[1998b, 2000]与恽自求等[2000]围绕 Nagata 问题关于广义度量空间的 g 函数刻画，周浩旋(Fitzpatrick，周浩旋[1994]；Williams，周浩旋[1998])关于度量空间的拓扑完备化和单

调正规空间的工作，杨忠强[1994a, 1994b, 1998, 1999, 2001]关于超紧空间的工作，陈怀鹏[1995]关于乘积空间的 k 空间性质，王延庚[1997]关于局部紧空间的函数空间的工作，侯吉成[1998]关于超空间的特征和 tightness 的工作，曹继岭等[1998]关于拟一致结构和拟可度量空间的工作，周金元等(Dow, 周金元[1999]; 周金元[1993, 1994])关于伪径向(pseudoradial)空间的工作，江守礼和王树泉等[1999]关于 S(n)-θ 闭空间的工作，彭良雪[2000]关于σ遗传闭包保持 k 网空间的工作等都是国内关于广义度量空间理论及相关课题的较好工作，限于篇幅，我们不在此一一叙述.

1.2 记号与术语

本书使用了选择公理的几种等价形式，如 Zorn 引理，紧空间乘积的 Tychonoff 定理和良序定理，同时也使用了一些附加的集论公理，如连续统假设(CH), Martin 公理(MA)和 BF(ω_2). 我们的绝大部分结果都是在 ZFC(即, Zermelo-Fraenkel 集论公理加选择公理)中讨论，几个附加的集论公理将在适当的章节中给予介绍. 本节定义一些记号和术语.

以 R 表示实直线，N, Q 和 I 分别表示 R 的自然数子集，有理数子集和单位闭区间. 记 $S_1=\{0\}\cup\{1/n : n\in N\}$. ω有三种含意，一是 R 的子集 $N\cup\{0\}$，二是第一个无限序数，三是最小的无限基数，它们的确切意义在上下文中是不会混淆的. 对于空间 X，τ(X)(在不引起混淆时记τ)表示 X 上的拓扑. 本书所论空间均指满足 T_2 分离性条件的拓扑空间，映射指连续的满函数. 对于集合 X 的子集族 $\mathcal{P}$, $x\in X$ 和 $A\subset X$，记

$$(\mathcal{P})_x=\{P\in\mathcal{P} : x\in P\},\ (\mathcal{P})_A=\{P\in\mathcal{P} : P\cap A\neq\varnothing\},\ \mathcal{P}_{|A}=\{P\cap A : P\in\mathcal{P}\},$$

$$st(x,\mathcal{P})=\cup(\mathcal{P})_x,\ st(A,\mathcal{P})=\cup\{P\in\mathcal{P} : P\cap A\neq\varnothing\},$$

$$\mathcal{P}^{<\omega}=\{\mathcal{F}\subset\mathcal{P} : \mathcal{F}\text{是有限的}\}.$$

若 x_n $(n\in N)$是 X 中的一列点，$\langle x_n\rangle$表示 X 的子集$\{x_n : n\in N\}$; (x_n)表示笛卡儿积 X^ω 中的第 n 个坐标为 x_n 的点; 象通常一样, $\{x_n\}$表示 X 中的第 n 项为 x_n 的序列. 对于 X 中有多个下标的序列，如$\{x_{nm}\}$，分别记$\{x_{nm}\}_n$和$\{x_{nm}\}_m$为固定 m 关于 n 和固定 n 关于 m 的序列. 若空间 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x，记$[x_n]=\{x\}\cup\{x_n : n\in N\}$. 对于空间 X 的子集族$\mathcal{P}$及映射 $f:X\to Y$，分别

记 $\mathcal{P}$ 的闭包 cl($\mathcal{P}$)={cl(P) : P$\in\mathcal{P}$}及 $\mathcal{P}$ 在 f 的象 f($\mathcal{P}$)={f(P) : P$\in\mathcal{P}$}. 对于积空间 $\prod_{n\in N} X_n$ 及 m$\in$N, 以 π_m : $\prod_{n\in N} X_n \to X_m$ 表示 $\prod_{n\in N} X_n$ 在第 m 个坐标上的投影映射. 以符号 ▌表示命题论证结束或命题是不证自明的.

未定义的术语以 Engelking[1977]和林寿[1995]为准. 为叙述的方便起见, 在引用文献时一些在林寿[1995]中论证过的命题有时以林寿[1995]代替原始文献, 请这些命题的作者谅解. 先回忆一些重要的距离函数、映射类及覆盖族.

定义 1.2.1 对于集合 X, 设 d: X$\times$X$\to$[0, ∞). 对于 A, C$\subset$X, x$\in$X, ε>0, 置

diamA=sup{d(x, y) : x, y$\in$A},

d(A, C)=inf{d(x, y) : x$\in$A, y$\in$C},

B(x, ε)={y$\in$X : d(x, y)<ε}.

考虑下述条件: 对于 x, y, z$\in$X,

(1) d(x, y)=0 当且仅当 x=y.

(2) d(x, y)=d(y, x).

(3) d(x, y)$\le$d(x, z)+d(z, y).

满足条件(1)~(3)的函数 d 称为 X 上的距离, 满足条件(1)和(2)的函数 d 称为 X 上的对称距离. 空间(X, d)称为度量空间, 若 X 是以{B(x, ε) : x$\in$X, ε>0}为基生成的拓扑空间. 空间(X, d)称为对称度量空间, 若 X 的子集 U 是 X 的开子集当且仅当对于每一 x$\in$U, 存在 ε>0 使得 B(x, ε)$\subset$U. 空间(X, d)称为半度量空间, 若(X, d)是对称度量空间且对于每一 x$\in$X 和 ε>0 有 x$\in$intB(x, ε). 这拓扑也称为由 d 生成的拓扑. 若空间 X 的拓扑可由距离(对称距离)d 生成, 那么 d 称为 X 上的度量(对称度量), X 称为可度量空间(可对称度量空间).

设 X 是度量空间, X 称为正规度量空间(Mrowka[1965]), 若 X 的非孤立点集是 X 的紧子集. 正规度量空间最初的定义是"存在 X 上的度量 d 使得对于 X 中互不相交的闭子集对 A, B 有 d(A, B)>0". 这与"X 的非孤立点集是 X 的紧子集"是等价的(Mrowka[1965]).

定义 1.2.2(Engelking[1977] 设映射 f:X$\to$Y.

(1) f 称为有限到一映射, 若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的有限子集.

(2) f 称为紧映射, 若每一 $f^{-1}(y)$是 X 的紧子集.

(1) f 称为 s 映射，若每一 $f^{-1}(y)$是 X 的可分子集.

(4) f 称为商映射，若 $f^{-1}(U)$是 X 的开子集，则 U 是 Y 的开子集.

(5) f 称为伪开映射，若 V 是 X 的开子集且 $f^{-1}(y)\subset V$，则 f(V)是 y 在 Y 中的邻域.

(6) f 称为几乎开映射，若对于 $y\in Y$，存在 $x\in f^{-1}(y)$使得如果 U 是 x 在 X 中的邻域，则 f(U)是 y 在 Y 中的邻域.

(7) f 称为开映射，若 V 是 X 的开子集，则 f(V)是 Y 的开子集.

(8) f 称为闭映射，若 F 是 X 的闭子集，则 f(F)是 Y 的闭子集.

(9) f 称为完备映射，若 f 是闭且紧的映射.

易验证

$$\begin{array}{ccc} & & \text{开映射} \Rightarrow \text{几乎开映射} \\ & & \Downarrow \\ \text{有限到一闭映射} \Rightarrow \text{完备映射} \Rightarrow \text{闭映射} \Rightarrow & & \text{伪开映射} \Rightarrow \text{商映射}. \end{array}$$

定义 1.2.3 设映射 $f:X\to Y$.

(1)(Michael[1966]) f 称为紧覆盖映射，若 Y 的任一紧子集是 X 中某紧子集在 f 下的象.

(2)(Boone, Siwiec[1976]) f 称为序列商映射，若$\{y_n\}$是 Y 中的收敛序列，那么存在$\{y_n\}$的子序列$\{y_{n_i}\}$和 X 中的收敛序列$\{x_i\}$使得每一 $x_i\in f^{-1}(y_{n_i})$.

(3)(Siwiec[1971]) f 称为序列覆盖映射，若$\{y_n\}$是 Y 中的收敛序列，那么存在 X 中的收敛序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

(4)(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]; Ikeda, 刘川, Tanaka[2001]) f 称为伪序列覆盖映射，若 Y 中的任一(含极限点的)收敛序列是 X 中某紧子集在 f 下的象.

(5)(林寿，刘川，戴牧民[1997]) f 称为子序列覆盖映射，若$\{y_n\}$是 Y 中的收敛序列，那么存在 X 中的紧子集 K 使得 f(K)是$\{y_n\}$的子序列.

(6)(林寿[1996c]) f 称为 1 序列覆盖映射，若对于 $y\in Y$ 存在 $x\in f^{-1}(y)$满足：如果 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 y，那么存在 X 中收敛于点 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

(7)(林寿[1996c]) f 称为 2 序列覆盖映射，若对于 $y\in Y$ 及 $x\in f^{-1}(y)$满足：如果 Y 中的序列$\{y_n\}$收敛于 y，那么存在 X 中收敛于点 x 的序列$\{x_n\}$使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

1971 年 Siwiec[1971]称定义 1.2.3(3)的映射为序列覆盖映射，1984 年 Gruenhage，Michael 和 Tanaka[1984]也称定义 1.2.3(4)的映射为序列覆盖映射，为不引起混淆，我们在此采用 Ikeda，刘川和 Tanaka[2001]的术语称定义 1.2.3(4)的映射为伪序列覆盖映射.

易验证

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{完备映射} \arrow[r, Rightarrow] & \text{紧覆盖映射} \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & & & \text{伪序列覆盖映射} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{2 序列覆盖映射} \arrow[r, Rightarrow] & \text{1 序列覆盖映射} \arrow[r, Rightarrow] & \text{序列覆盖映射} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{子序列覆盖映射.} \\
 & & & \text{序列商映射} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

定义 1.2.4 设 X 是一个空间, $P\subset X$.

(1) 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x，称$\{x_n\}$是终于 P 的，如果存在 $m\in N$ 使得$\{x\}\cup\{x_n : n\geq m\}\subset P$.

(2) P 称为 X 中的点 x 的序列邻域，若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x，则$\{x_n\}$是终于 P 的.

(3) P 称为 X 的序列开集，若 P 是 P 中每一点的序列邻域.

(4) P 称为 X 的序列闭集，若 $X\setminus P$ 是 X 的序列开集.

(5)(Franklin[1965]) X 称为序列空间，若 X 的每一序列开集是 X 的开集.

(6)(Gale[1950]) X 称为 k 空间，若 $A\subset X$ 使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K\cap A$ 是 K 的闭子集，则 A 是 X 的闭子集.

(7)(Franklin[1965]) X 称为 Fréchet 空间，若 $x\in cl(A)\subset X$，则存在 A 中点组成的序列$\{x_n\}$使得在 X 中$\{x_n\}$收敛于 x.

(8)(Siwiec[1971]) X 称为强 Fréchet 空间，若$\{A_n\}$是 X 中递减的集列且 $x\in \bigcap_{n\in N} cl(A_n)$，则存在 $x_n\in A_n (n\in N)$使得在 X 中序列$\{x_n\}$收敛于 x.

显然，第一可数空间$\Rightarrow$强 Fréchet 空间$\Rightarrow$Fréchet 空间$\Rightarrow$序列空间$\Rightarrow$k 空间. 这些空间类我们统称为弱第一可数空间. 易证明，对于空间 X 的子集 P，若 X 中的每一收敛于 x 的序列存在子序列是终于 P 的，则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

定义 1.2.5(Engelking[1977]) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的子集族.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的点有限集族，若对于每一 $x\in X$, $(\mathcal{P})_x$ 是有限的.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的点可数集族，若对于每一 $x\in X$, $(\mathcal{P})_x$ 是可数的.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的紧有限集族，若对于 X 的每一紧子集 K, $(\mathcal{P})_K$ 是有限的.

(4) $\mathcal{P}$ 称为 X 的紧可数集族，若对于 X 的每一紧子集 K, $(\mathcal{P})_K$ 是可数的.

(5) $\mathcal{P}$ 称为 X 的星可数集族，若对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $(\mathcal{P})_P$ 是可数的.

(6) $\mathcal{P}$ 称为 X 的离散集族，若对于每一 $x\in X$，存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得$(\mathcal{P})_U$ 至多只有一个元.

(7) $\mathcal{P}$ 称为 X 的局部有限集族，若对于每一 $x\in X$，存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得$(\mathcal{P})_U$ 是有限的.

(8) $\mathcal{P}$ 称为 X 的局部可数集族，若对于每一 $x\in X$，存在 x 在 X 中的开邻域 U 使得$(\mathcal{P})_U$ 是可数的.

(9) $\mathcal{P}$ 称为 X 的闭包保持集族，若对于每一 $\mathcal{P}'\subset\mathcal{P}$，有 $cl(\cup\mathcal{P}')=\cup\{cl(P) : P\in\mathcal{P}'\}$.

(10) $\mathcal{P}$ 称为 X 的遗传闭包保持集族，若对于每一 $H(P)\subset P\in\mathcal{P}$，集族$\{H(P) : P\in\mathcal{P}\}$是闭包保持的.

(11) $\mathcal{P}$ 称为 X 的弱遗传闭包保持集族，若对于每一 $p(P)\in P\in\mathcal{P}$，集族$\{\{p(P)\} : P\in\mathcal{P}\}$是闭包保持的.

设 Φ 是定义 1.2.5 所定义的一种集族性质，称空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 是 σ - Φ 的，若 $\mathcal{P}$ 是可数个具有性质 Φ 的集族之并.

下面定义两类生成空间拓扑的覆盖.

定义 1.2.6 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1)(Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]) 空间 X 称为关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑，如果对于 $A\subset X$, A 是 X 的闭子集当且仅当对于每一 $P\in\mathcal{P}$, $P\cap A$ 是 P 的闭子集.

(2)(Morita[1953]) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的闭覆盖，称 X 被 $\mathcal{P}$ 所控制(dominated)，若对于 $\mathcal{P}$ 的任一子集族 $\mathcal{P}'$，$\cup\mathcal{P}'$是 X 的闭子集且 $A\subset\cup\mathcal{P}'$是闭的当且仅当对于每一 $P\in\mathcal{P}'$, $P\cap A$ 是 P 的闭子集.

空间 X 称为 k_ω 空间(Franklin, Thomas[1977a])，若 X 关于某一由紧子集组成的可数闭覆盖具有弱拓扑.

“弱拓扑”在文献中有不同的含意．我们所称的“控制”，在有些文献中称为“弱拓扑”或“Whitehead 弱拓扑”．空间 X 关于 $\mathcal{P}$ 具有弱拓扑，Dugundji[1966]称为“The weak topology in X determined by $\mathcal{P}$”，而 Gruenhage, Michael, Tanaka[1984]称为“A space X is determined by $\mathcal{P}$”．由于 determined(确定)一词在中文表达时易混淆，本书仍使用术语“弱拓扑”．易验证，空间 X 是 k 空间当且仅当 X 关于全体紧子集所组成的覆盖具有弱拓扑，空间 X 是序列空间当且仅当 X 关于全体紧度量子集(或收敛序列)所组成的覆盖具有弱拓扑．可数 CW 复形是 k_ω 空间．空间 X 的遗传闭包保持的闭覆盖是 X 的控制族，而空间 X 的控制族是 X 的闭包保持的闭覆盖．

定义 1.2.7　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖．

(1)(Arhangel'skii[1959]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的网，若 X 的每一开子集是 $\mathcal{P}$ 的某子集族的并．

(2)(O'Meara[1971]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网，若对于 X 中的每一紧子集 K 及 X 中包含 K 的开子集 V，存在 $\mathcal{P}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $K\subset\cup\mathcal{P}'\subset V$.

(3)(Guthrie[1971]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 网，若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得序列$\{x_n\}$是终于 P 的且 $P\subset V$.

(4)(高智民[1987]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs*网，若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域，则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得序列$\{x_n\}$的某子序列是终于 P 的且 $P\subset V$.

(5)(林寿[1997a]) 空间 X 称为 csf 可数空间，如果 X 存在子集族 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 使得每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中可数的 cs 网.

若空间 X 的 k 网 $\mathcal{P}$ 的每一元是 X 的闭子集(紧子集，可分子集，可度量子集)，则称 $\mathcal{P}$ 是 X 的闭 k 网(紧 k 网，可分 k 网，可度量 k 网)．类似可定义 1.2.7 中的相关概念.

具有可数网的空间称为 cosmic 空间(Michael[1966])，具有可数 k 网的空间称为 $\aleph_0$ 空间(Michael[1966])，具有 σ 局部有限网的空间称为 σ 空间(Okuyama[1967])，具有 σ 局部有限 k 网的空间称为 $\aleph$ 空间(O'Meara[1971])．特别提醒读者注意，在大多数文献中，cosmic 空间，σ 空间，$\aleph_0$ 空间与 $\aleph$ 空间都预先假设正则性．由于本书所论空间是在 T_2 空间中，为了使命题更具有一般性，所以这四类空间都未预先假设正则性．术语 cs*网由高智民[1987]引入，研究表明它是一个很重要的概念, Tanaka[1987b]曾记 cs*网为条件(C_1).

定义 1.2.8 设空间 X 的子集族 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 满足: 对于 $x\in X$, $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的网, 即 $\mathcal{P}_x\subset(\mathcal{P})_x$ 且若 $x\in G\in\tau$, 存在 $P\in\mathcal{P}_x$ 使得 $P\subset G$; 并且如果 $U, V\in\mathcal{P}_x$, 那么存在 $W\in\mathcal{P}_x$ 使得 $W\subset U\cap V$.

(1)(林寿[1996c]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列邻域网, 若每一 $\mathcal{P}_x$ 的元是 x 在 X 中的序列邻域.

(2)(林寿[1996c]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列开网, 若每一 $\mathcal{P}_x$ 的元是 X 的序列开集.

(3)(Arhangel'skii[1966]) $\mathcal{P}$ 称为 X 的弱基, 若 $G\subset X$ 使得对于 $x\in G$ 存在 $P\in\mathcal{P}_x$, 有 $P\subset G$, 那么 G 是 X 的开子集.

上述 $\mathcal{P}_x$ 分别称为 x 在 X 中的序列邻域网(简记为 sn 网), 序列开网(简记为 so 网)和弱基(或弱邻域基, 弱邻域网).

(4)(Arhangel'skii[1966], 林寿[1997a]) 若空间 X 的每一点都有可数的 sn 网(so 网, 弱基), 则称 X 是 snf 可数(sof 可数, gf 可数)空间.

(5)(Siwiec[1974]) 具有 σ 局部有限弱基的正则空间称为 g 可度量空间.

覆盖性质在发展广义度量理论中起了很大的作用. 这两个一般拓扑学的研究方向时常是难以区分的, 其中一个方向的进展立即导致另一方向的进展. 为了完备起见, 我们定义几个需使用的覆盖性质与正规性.

定义 1.2.9(Burke[1984]) 设 X 是一个空间.

(1) X 称为仿紧空间, 若 X 的每一开覆盖存在局部有限的开加细.

(2) X 称为次仿紧空间, 若 X 的每一开覆盖存在 σ 局部有限的闭加细.

(3) X 称为亚 Lindelöf 空间, 若 X 的每一开覆盖存在点可数的开加细.

(4)(Heath, Lutzer, Zenor[1973]) X 称为单调正规空间, 若存在对应 $G: X\times\tau(X)\to\tau(X)$满足

(4.1) $x\in G(x, U)\subset U$.

(4.2) 若 $U\subset V$, 则 $G(x, U)\subset G(x, V)$.

(4.3) 若 $x\neq y$, 则 $G(x, X\setminus\{y\})\cap G(y, X\setminus\{x\})=\varnothing$.

(5) X 称为集态正规空间, 若 X 的每一离散的闭子集族存在两两互不相交的开扩张.

此处, 对于 X 的子集族 $\mathcal{F}=\{F_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$和 $\mathcal{G}=\{G_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$, 若每一 $F_\alpha\subset G_\alpha$, 则称 $\mathcal{G}$ 是 $\mathcal{F}$ 的扩张.

易验证, 度量空间是仿紧空间和单调正规空间, 正则的 σ 空间是次仿紧空间, 单调正规空间

是集态正规空间, 仿紧空间是次仿紧空间和亚 Lindelöf 空间, 次仿紧的集态正规空间是仿紧空间, 可分的亚 Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间(Burke[1984]).

本节的最后定义几个特殊的商空间, 如 S_2, S_ω 和 S_{ω_1}.

定义 1.2.10 设序列 $T_0=\{a_n\}$收敛于 $x_0\notin T_0$且设每一序列 T_n $(n\in N)$收敛于 $a_n\notin T_n$. 让 T 是空间族<$T_n\cup\{a_n\}$>的拓扑和. $S_2=\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\in\omega}T_n)$是由贴合空间$(T_0\cup\{x_0\})\oplus T$ 中的每一 $a_n\in T_0$与 $a_n\in T$ 所得到的商空间. $S_\omega=\{x_0\}\cup(\bigcup_{n\in N}T_n)$是由贴合空间 T 中所有的 $a_n\in T$ 到一点 x_0所得到的商空间. 即 S_ω 是把可数多个非平凡的收敛序列的拓扑和中的非孤立点贴成一点所成的商空间. 一般地, 对于基数$\alpha\geq\omega$, S_α 是把α个非平凡的收敛序列的拓扑和中的非孤立点贴成一点所成的商空间. S_2 称为 Arens 空间(Arens[1950]), S_ω 称为序列扇(Arhangel'skii, Franklin[1968]). 对于基数$\alpha\geq\omega$, 形如S_α 的空间统称为扇空间.

我们可以将空间 S_2 和 S_ω 一般化.

定义 1.2.11 对于空间 X, 及 $x\in X$. X 的子集 C 称为空间 X(在点 x)的梳(林寿[1997a]), 如果 $C=\{x\}\cup\langle x_n\rangle\cup\{x_{nm}: n, m\in N\}$, 其中序列$\{x_n\}$收敛于 x, 对于每一 $n\in N$, 序列$\{x_{nm}\}_m$收敛于 x_n, 且 x, x_n 及 x_{nm} 的各项是两两互不相同的. 设C 是 X 的梳, C 的子集 D称为 C 的对角, 如果 D 是C 的收敛序列且 D与无限个关于 m 的序列$\{x_{nm}\}_m$相交. X的子集 F称为空间 X(在点 x)的扇(林寿[1997a]), 如果 $F=\{x\}\cup\{x_{nm}: n, m\in N\}$, 其中对于每一 $n\in N$, 序列$\{x_{nm}\}_m$收敛于 x, 且 x 及 x_{nm} 的各项是两两互不相同的. 设 F 是 X 的扇, F 的子集 D 称为 F 的对角, 如果 D 是 F 的收敛序列且 D 与无限个关于 m 的序列$\{x_{nm}\}_m$ 相交. 空间 X 称为α_4空间(Arhangel'skii[1972, 1981], Nogura[1985]), 如果对于 $x\in X$, X 的每一在 x 的扇有对角收敛于 x.

Nogura, Shibakov[1996]也提出扇及收敛对角的概念. α_4 空间是采用 Nogura[1985]的术语, 而 Arhangel'skii[1972, 1981]在讨论 Fréchet 空间的乘积性质时把这空间命名为类<4>.

1.3 预备知识: 广义度量空间类与度量空间的映象

本节及下一节的大部分内容已出现在《广义度量空间与映射》中. 为了完备起见, 我们将本

书要使用的一些相关内容做为预备知识列于这二节，除了可度量空间与σ空间的两个著名特征定理(见定理1.3.1和定理1.3.5)没有给出论证外，其余的结果都给出了详细的证明. 本节主要包含两部分内容，一是几类重要的广义度量空间的刻画与映射定理，二是描述将具有点可数覆盖空间表示为度量空间映象的 Ponomarev 方法.

定理 1.3.1 对于空间 X，下述条件相互等价:

(1) X 是可度量空间.

(2) X 是具有σ局部有限基的正则空间.

(3) X 存在开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$使得对于 X 的任一紧子集 K，$\langle st(K, \mathcal{U}_n)\rangle$是 K 在 X 中的邻域基.

(4) X 存在展开$\{\mathcal{U}_n\}$使得每一$\mathcal{U}_{n+1}$星加细$\mathcal{U}_n$. ∎

证明见林寿[1995]的定理 1.3.3. 此处，X 的开覆盖列$\{\mathcal{U}_n\}$称为 X 的展开，若对于每一$x\in X$，$\langle st(x, \mathcal{U}_n)\rangle$是 x 在 X 中的邻域基，具有展开的空间称为可展空间(Engelking[1977])；而称 X 的覆盖$\mathcal{U}_{n+1}$星加细$\mathcal{U}_n$ (Engelking[1977])，若对于每一$U\in\mathcal{U}_{n+1}$，存在$V\in\mathcal{U}_n$使得$st(U, \mathcal{U}_{n+1})\subset V$.

引理 1.3.2 设$f:X\to Y$是闭映射，则存在 X 的闭子空间 Z 使得$g=f_{|Z}: Z\to Y$是闭映射且每一$g^{-1}(y)$或者是单点集，或者是$\partial f^{-1}(y)$.

证明. 对于每一 $y\in Y$，取定点 $p_y\in f^{-1}(y)$. 置 $Z=\cup\{\partial f^{-1}(y) : \partial f^{-1}(y)\neq\varnothing\}\cup\{p_y : \partial f^{-1}(y)=\varnothing\}$，则 Z 是 X 的闭子空间，$g=f_{|Z}: Z\to Y$是闭映射且每一$g^{-1}(y)$或者是单点集，或者是$\partial f^{-1}(y)$. ∎

如下是著名的 Hanai-Morita-Stone 定理(Engelking[1977]).

定理 1.3.3 设 X 是可度量空间. 若 $f:X\to Y$ 是闭映射，则下述条件相互等价:

(1) Y 是可度量空间.

(2) Y 是第一可数空间.

(3) 每一$\partial f^{-1}(y)$是 X 的紧子集.

证明. (1)$\Rightarrow$(2). 显然.

(2)$\Rightarrow$(3). 若存在 $y\in Y$ 使得$\partial f^{-1}(y)$不是 X 的紧子集，则有$\partial f^{-1}(y)$的可数闭离散子空间$\langle x_i\rangle$，于是存在 X 的离散开子集族$\langle V_i\rangle$使得每一$x_i\in V_i$. 让$\langle G_i\rangle$是 y 在 Y 中的局部基. 由于

$x_i \in \partial f^{-1}(y)$, 由归纳法可选取 $z_1 \in V_1 \cap f^{-1}(G_1) \setminus f^{-1}(y)$, $z_{i+1} \in V_{i+1} \cap f^{-1}(G_{i+1}) \setminus f^{-1}(\{y, f(z_1), \ldots, f(z_i)\})$. 因为 $f(z_i) \in G_i$, $\{f(z_i)\}$ 在 Y 中收敛于 y, 然而 $z_i \in V_i$ 且 f 是闭映射, 于是 $\{f(z_i)\}$ 在 Y 中无聚点, 矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (1). 由引理 1.3.2, 不妨设 f 是完备映射. 由定理 1.3.1, 存在 X 的开覆盖列 $\{\mathcal{U}_n\}$ 使得对于 X 的任一紧子集 K, $<st(K, \mathcal{U}_n)>$ 是 K 在 X 中的邻域基. 对于每一 $n \in N$, 置 $\mathcal{V}_n = \{Y \setminus f(X \setminus U) : U \in \mathcal{U}_n\}$, 那么 $\{\mathcal{V}_n\}$ 是 Y 的开覆盖列且满足如果 H 是 Y 的紧子集, 则 $<st(H, \mathcal{V}_n)>$ 是 H 在 Y 中的邻域基. 因此, Y 是可度量空间. █

定理 1.3.4(Jayanthan, Kannay[1988]) 设 X 是度量空间, 下述条件相互等价:

(1) X 是正规度量空间.

(2) X 的任一闭映象是可度量空间.

(3) X 的任一闭子集的边界是 X 的紧子集.

证明. 由定理 1.3.3 只须证(2) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (3).

(2) $\Rightarrow$ (1). 设空间 X 的任一闭映象是可度量空间. 让 F 是 X 的非孤立点的集合, 若 F 不是 X 的紧子集, 则 F 含有可数的闭离散子空间 A. 让 f 是从 X 到 X/A 上的商映射, 则 f 是闭映射且 $\partial f^{-1}(\{A\})=A$ 不是 X 的紧子集, 于是 X/A 不是可度量空间, 矛盾. 故 F 是 X 的紧子集, 所以 X 是正规度量空间.

(1) $\Rightarrow$ (3). 设 X 是正规度量空间且 F 是 X 的闭子集. 如果 x 是 X 的孤立点, 那么 $x \notin \partial F$, 于是 ∂F 是 X 的非孤立点集的闭子集, 从而 ∂F 是 X 的紧子集. █

对于 σ 空间有比度量空间更出色的刻画.

定理 1.3.5 对于正则空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是 σ 空间.

(2) X 具有 σ 离散网.

(3) X 具有 σ 闭包保持网. █

证明见林寿[1995]的定理 3.3.1.

下面转入讨论度量空间的映象. 先介绍两个点可数覆盖的性质. 如下的 Miščenko 引理是我们处理点可数覆盖的重要工具, 它的叙述形式及证明方法我们将多次使用. 对于空间 X 的子集 A 及 A 的覆盖 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ 称为 A 的极小覆盖, 若对于每一 $P \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P} \setminus \{P\}$ 不是 A 的覆盖.

引理 1.3.6(Miščenko[1962]) 如果 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数覆盖，那么 X 的每一非空子集仅有至多可数个由 $\mathcal{P}$ 的元组成的有限极小覆盖.

证明. 设 A 是空间 X 的任一非空子集且$\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$是由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 A 的有限极小覆盖全体. 若引理不成立，则存在$n\in N$使得集族$\mathcal{R}=\{\mathcal{P}_\alpha : \alpha\in\Lambda, |\mathcal{P}_\alpha|=n\}$是不可数的. 对于$P\in\mathcal{P}$，令$\mathcal{R}(P)=\{\mathcal{P}_\alpha : P\in\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}\}$. 取$x_1\in A$，则$\mathcal{R}=\cup\{\mathcal{R}(P) : x_1\in P\in\mathcal{P}\}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是点可数的，于是存在$P_1\in\mathcal{P}$使得$x_1\in P_1$且满足$|\mathcal{R}(P_1)|>\omega$. 若 n=1，则$|\mathcal{R}(P_1)|=1$，矛盾，故 n>1. 由于$\mathcal{R}(P_1)$的每一元是 A 的极小覆盖，故存在 $x_2\in A\setminus P_1$. 令 $\mathcal{R}(P_1, P)=\{\mathcal{P}_\alpha : P\in\mathcal{P}_\alpha\in\mathcal{R}(P_1)\}$，则$\mathcal{R}(P_1)=\cup\{\mathcal{R}(P_1, P) : x_2\in P\in\mathcal{P}\}$. 因此，存在$P_2\in\mathcal{P}$使得$x_2\in P_2$, $P_2\neq P_1$且$|\mathcal{R}(P_1, P_2)|>\omega$. 重复上述过程，可得到点集$\{x_i\}_{i\le n}$及集族$\{P_i\}_{i\le n}$满足：每一$x_i\in P_i\in\mathcal{P}$，当$i\neq j$时$P_i\neq P_j$且$|\mathcal{R}(P_1, P_2,\ldots, P_n)|>\omega$，但是$|\mathcal{R}(P_1, P_2,\ldots, P_n)|=1$，矛盾. 故，由 $\mathcal{P}$ 的元组成的 A 的有限极小覆盖至多是可数的. ∎

引理 1.3.7 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 cs*网. 若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于点 x，记 $K=[x_n]$，则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列$\{\mathcal{P}_n\}$满足

(1) $<\cup\mathcal{P}_n>$是 K 在 X 中的网.

(2) 每一 $\mathcal{P}_n|_K$ 是 X 的非空闭子集族.

(3) 对于 $y\in K$ 及 $P_n\in(\mathcal{P}_n)_y$, $\langle P_n\rangle$是 y 在 X 中的网.

(4) 若更设 $\mathcal{P}$ 关于有限交封闭，则每一 $\mathcal{P}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{P}_n$.

证明. 不妨设所有的 x_n 是两两互不相同的. 先证明对于$K\subset U\in\tau$，存在 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 满足

(7.1) $K\subset\cup\mathcal{F}\subset U$.

(7.2) $\mathcal{F}|_K$ 是 X 的非空的闭子集族.

令$\mathcal{P}'=\{P\in\mathcal{P} : x\in P\subset U\}=\langle P_i\rangle$. 对于$k\in N$，若序列$\{x_n\}$是不终于$\bigcup_{i\le k}P_i$的，则存在子序列$\{x_{n_k}\}$使得每一$x_{n_k}\in X\setminus\bigcup_{i\le k}P_i$，从而有$\{x_{n_k}\}$的子序列$\{x_{n_{k(j)}}\}$和 $m\in N$ 使得$<x_{n_{k(j)}}>\subset P_m$，矛盾. 因此存在 $k\in N$ 使得$\{x_n\}$是终于$\bigcup_{i\le k}P_i$的. 由此易作出 $\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 满足条件(7.1)和(7.2). 集

族的这种性质记为 F*(K, U).

现在, 置 $\Phi=\{\mathcal{F}\in\mathcal{P}^{<\omega}:\mathcal{F}$ 具有性质 F*(K, X)}, 则 Φ 是可数的. 记 $\mathcal{H}=<\mathcal{P}_n>$. 显然, $\{\mathcal{P}_n\}$ 满足(1)和(2). 设 $y\in K$ 且对于 $n\in N$ 有 $P_n\in(\mathcal{P}_n)_y$, 若 $y\in V\in\tau$, 如果 y=x, 令 $K_1=V\cap K$, 则存在 $\mathcal{F}'\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 具有性质 F*(K_1, V), 同时存在 $\mathcal{F}''\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 使得 $K\setminus K_1\subset\cup\mathcal{F}''\subset X\setminus K_1$, 不妨设 $\varnothing\notin\mathcal{F}''_{|K\setminus K_1}$, 于是 $\mathcal{F}'\cup\mathcal{F}''$ 具有性质 F*(K, X), 从而有 $i\in N$ 使得 $\mathcal{F}'\cup\mathcal{F}''=\mathcal{P}_i$, 所以 $y\in P_i\subset\cup\mathcal{F}'\subset V$, 故 $<P_n>$ 是 y 在 X 中的网. 如果 $y\neq x$, 则存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $y\in P\subset V\setminus(K\setminus\{y\})$, 同时存在 $\mathcal{G}\in\mathcal{P}^{<\omega}$ 具有性质 F*($K\setminus\{y\}$, $X\setminus\{y\}$), 从而 $\mathcal{G}\cup\{P\}$ 具有性质 F*(K, X), 于是存在 $j\in N$ 使得 $\mathcal{G}\cup\{P\}=\mathcal{P}_j$, 那么 $y\in P_j=P\subset V$, 故 $<P_n>$ 是 y 在 X 中的网. 因而, (3)成立.

若更设 $\mathcal{P}$ 关于有限交封闭. 对于每一 $n\in N$, 让 $\mathcal{F}_n=\{F\in\Lambda_{i\leq n}\mathcal{P}_i:F\cap K\neq\varnothing\}$, 那么每一 $\mathcal{F}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{F}_n$, 并且易验证 $\mathcal{P}$ 的有限子集列 $\{\mathcal{F}_n\}$ 满足相应的条件(1)~(3). █

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的网. 记 $\mathcal{P}=\{P_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, Λ 赋予离散拓扑, 令 $M=\{\alpha=(\alpha_i)\in\Lambda^\omega$: $<P_{\alpha_i}>$ 构成 X 中某点 x_α 的网}, 则 M 是度量空间, 并且对于每一 $\alpha\in M$, x_α 是唯一确定的, 于是可以定义函数 $f:M\to X$ 使得 $f(\alpha)=x_\alpha$. 我们称(f, M, X, $\mathcal{P}$)为 Ponomarev 系. Ponomarev 系是 Ponomarev[1960]研究度量空间开映象时使用的方法的一般化.

引理 1.3.8 设(f, M, X, $\mathcal{P}$)是 Ponomarev 系.

(1) 若对于每一 $x\in X$, 存在 $\mathcal{P}$ 的可数子族构成 x 在 X 中的网, 则 f 是映射.

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是可数的, 则 M 是可分度量空间.

(3) 若 $\mathcal{P}$ 是点可数的, 则 f 是 s 映射.

(4) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 cs*网, 则 f 是伪序列覆盖映射和序列商映射.

证明. (1) 显然, f 是满的函数. 另一方面, 对于 $\alpha=(\alpha_i)\in M$, $f(\alpha)=x\in U\in\tau(X)$, 存在 $m\in N$ 使得 $x\in P_{\alpha_m}\subset U$. 令 $V=\{\gamma\in M:\gamma$ 的第 m 个坐标是 $\alpha_m\}$, 则 V 是 M 中含有 α 的开子集且 $f(V)\subset P_{\alpha_m}\subset U$, 故 f 是连续的.

(2) 是显然的. 若 $\mathcal{P}$ 是点可数的. 对于每一 $x\in X$, 让 $(\mathcal{P})_x=\{P_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$, 则

$f^{-1}(x)\subset\Gamma^{\omega}\cap M$, 于是 $f^{-1}(x)$是 M 的可分子集，从而 f 是 s 映射. 故(3)也成立.

(4) 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数 cs*网. 我们先证明 f 是伪序列覆盖映射. 设$\{x_n\}$是 X 中收敛于 x 的序列，让 $K=[x_n]$, 则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列$\{\mathcal{P}_n\}$满足引理 1.3.7 的条件(1)~(3). 对于每一 $n\in N$, 存在Λ的有限子集Γ_n使得 $\mathcal{P}_n=\{P_\alpha : \alpha\in\Gamma_n\}$. 置 $L=\{(\alpha_i)\in\prod_{n\in N}\Gamma_n : K\bigcap(\bigcap_{i\in N}P_{\alpha_i})\neq\varnothing\}$. 那么下述断言(8.1)~(8.3)表明 f 是伪序列覆盖映射.

(8.1) L 是紧子集$\prod_{n\in N}\Gamma_n$的闭子集，从而 L 是 Λ^{ω} 的紧子集.

设 $\alpha=(\alpha_i)\in\prod_{n\in N}\Gamma_n\setminus L$, 则 $K\bigcap(\bigcap_{i\in N}P_{\alpha_i})=\varnothing$, 从而存在 $i_0\in N$ 使得 $K\bigcap(\bigcap_{i\le i_0}P_{\alpha_i})=\varnothing$. 令 $W=\{(\beta_i)\in\prod_{n\in N}\Gamma_n :$ 对于$i\le i_0$有$\beta_i=\alpha_i\}$, 则 W 是$\prod_{n\in N}\Gamma_n$中含有点α的开子集且 $W\cap L=\varnothing$.

(8.2) $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$.

设$\alpha=(\alpha_i)\in L$. 取定 $y\in K\bigcap(\bigcap_{i\in N}P_{\alpha_i})$，则$<P_{\alpha_i}>$是 y 在 X 中的网，于是$\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=y\in K$, 从而有 $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$.

(8.3) $K\subset f(L)$.

设 $y\in K$. 对于每一 $i\in N$, 存在$\alpha_i\in\Gamma_i$使得 $y\in P_{\alpha_i}$，令$\alpha=(\alpha_i)$, 则$\alpha\in L$ 且由(8.2)所证知 $f(\alpha)=x$, 因此 $K\subset f(L)$.

最后，证明 f 是序列商映射. 若$\{x_n\}$是 X 中的收敛序列，则存在 M 的紧子集 K 使得 $f(K)=[x_n]$. 对于每一 $n\in N$, 取定 $z_n\in f^{-1}(x_n)\cap K$, 那么序列$\{z_n\}$存在收敛的子序列$\{z_{n_i}\}$, 从而 f 是序列商映射. ∎

由于度量空间的σ局部有限基在子序列覆盖的 s 映射下的象空间具有点可数 cs*网，所以有

推论 1.3.9(林寿[1995]) 空间 X 是度量空间的伪序列覆盖(序列商，子序列覆盖)的 s 映象当且仅当 X 具有点可数 cs*网. ∎