度量空间与函数空间的拓扑

(第二版)

林　寿　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

本书的主要内容是函数空间的广义度量性质及基数函数性质. 全书由两部分组成, 第一部分介绍紧空间、仿紧空间、度量空间及度量空间的连续映像, 第二部分介绍连续函数空间的拓扑结构、基数函数及某些重要的广义度量性质. 本书展示了度量空间映像的核心内容及函数空间优美的对偶理论, 突出了完全性在探索函数空间收敛性中的作用, 把集论拓扑的研究应用于函数空间.

本书可供高等院校数学系高年级本科生、研究生以及数学工作者参考, 也可供相关科研人员使用.

图书在版编目(CIP)数据

度量空间与函数空间的拓扑/林寿著. —2 版. —北京：科学出版社, 2018. 3
ISBN 978-7-03-056654-6

Ⅰ. ①度… Ⅱ. ①林… Ⅲ. ①度量空间–拓扑 ②函数空间–拓扑
Ⅳ. ①O189 ②O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 036581 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004 年 5 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2018 年 3 月第 二 版 印张: 15 3/4
2018 年 3 月第二次印刷 字数: 307 000

定价: 118.00 元

第二版前言

谨以本书的再版祝贺苏州大学吴利生教授 80 寿辰.

本书第一版出版于 2004 年, 其主要目的在于使世纪之交活跃的 “度量空间的连续映射” 与 “连续函数空间的拓扑性质” 这两个研究方向融为一体, 有更多的青年数学工作者投身于该方向的研究[161]. 近年来, 一般拓扑学的一个活跃的研究领域是 A.V. Arhangel'skiĭ 等学者致力于具有更丰富代数结构的拓扑空间的研究, 从而发展了拓扑代数的研究方向[30]. 拓扑代数的研究可谓“殊途同归”. 一方面, 20 世纪 70 年代至 90 年代, 一些俄罗斯学者从函数空间的研究逐步进入拓扑代数的研究, 函数空间作为具有良好性质的拓扑群在拓扑代数的研究中具有特别的意义; 另一方面, 21 世纪初国内一些青年人从拓扑空间论的研究逐步进入拓扑代数的研究, 从而形成了拓扑代数中广义度量空间理论的研究方向[146, 148]. 这表明关于度量空间与函数空间拓扑的研究具有深厚底蕴与巨大潜力. 近年来, 关于广义度量空间、函数空间、选择理论、描述集论、拓扑代数与泛函分析的研究更强化了这一观点[40, 56]. 本书第一版出版后, 度量空间与函数空间拓扑的研究均有不少新的进展, 为更好地反映学科研究趋势、展示国内学者贡献, 特出版经修订后的第二版.

本书的修订和出版得到国家自然科学基金资助项目 “仿拓扑群中的三空间问题” (编号: 11471153) 和福建省省级重点学科 (数学) 建设经费的支持. 修订稿的录入和编辑得到作者在四川大学、闽南师范大学的研究生的帮助, 其中郑春燕同学绘制了全书的插图. 借此机会, 向所有关心、支持和帮助第二版出版的同行们表示衷心的感谢.

作　者

2017 年 8 月

第一版前言

从 K. Weierstrass 以来, 人们十分关心闭区间上的连续函数列以及它们的收敛性. 在泛函分析、微分方程、代数拓扑、微分几何和概率论及数学许多分支的应用中常出现寻求函数集的极限问题. 这是数学中最常见的现象之一. 通过在函数集上定义一些自然的拓扑, 借助一般拓扑的方法, 这类问题可转化为函数空间的拓扑. 拓扑化从一个拓扑空间到另一个拓扑空间的连续函数集的思想正是来自函数序列的点式收敛和一致收敛的概念. 19 世纪末, C. Arzelà, G. Ascoli, U. Dini 和 J. Hadamard 等一些学者就开始从事函数空间理论的研究. 1906 年 M. Fréchet[81] 在研究连续函数集的收敛问题时引入度量空间的概念, 并探讨了上确界度量拓扑. 在一般拓扑学发展早期, 拓扑学家讨论的函数空间拓扑首先是以分析为背景的点式收敛拓扑和一致收敛拓扑. 1945 年 R. Fox[79] 定义了连续实值函数集合上的紧开拓扑, 引导人们关注函数空间的拓扑性质. 1976 年 A. Arhangel'skiĭ 的论文[15] *On some topological spaces that arise in functional analysis* 是一般拓扑学对于函数空间系统研究的标志. 1988 年 R.A. McCoy 和 I. Ntantu[191] 的著作 *Topological Properties of Spaces of Continuous Functions* 和 1992 年 A. Arhangel'skiĭ[22] 的著作 *Topological Function Spaces* 进一步推动了函数空间理论的研究.

1991 年作者与广西大学刘川在四川大学数学研究所访问期间, 与四川大学滕辉一同研读了 A. Arhangel'skiĭ, W.W. Comfort, R.A. McCoy 和 I. Ntantu 等关于函数空间和拓扑群的论著, 开始在国内外刊物发表论文. 1994 年项目 "点集拓扑" (编号: 19476010) 和 "函数空间的拓扑性质" (编号: 19501023) 获得了国家自然科学基金资助, 从而有力地支持了作者从事函数空间的研究. 本书的部分内容还来自国家自然科学基金资助项目 "集论拓扑在广义度量理论和覆盖理论的应用" (编号: 19971048) 的部分研究成果.

函数空间讨论的中心问题之一是寻求拓扑性质 P 和 Q 使得拓扑空间 X 具有性质 P 当且仅当连续函数空间 $C(X,\mathbb{R})$ 具有性质 Q[21]. 度量空间是数学研究的主要对象之一, 连续函数空间理论最基本的内容是它的可度量性. 20 世纪 70 年代以来, 广义度量空间理论和集论拓扑中的基数函数理论取得了巨大成就, 所以函数空间的广义度量性质及基数函数性质是我们探索的重点之一. 本书由两部分共 6 章组成. 第一部分介绍紧空间、仿紧空间、度量空间及度量空间的连续映像. 第二部分介绍连续函数空间的拓扑结构、基数函数及某些重要的广义度量性质. 由于函数空间具有较丰富的结构, 同时与泛函分析、概率论等分支有密切的联系, 限于作者

的水平, 在此只能介绍一些最基本的内容, 包括作者近年来在度量空间映像及函数空间理论的部分研究成果. 只要读者了解点集拓扑学的一些初步知识, 如学习了熊金城的《点集拓扑讲义》[286] 或蒲保明、蒋继光和胡淑礼的《拓扑学》[235], 就可顺利地阅读本书.

近 10 年来, 围绕 J. van Mill 和 G.M. Reed[206] 主编的 *Open Problems in Topology* 中的相关问题, 函数空间理论获得了很大的发展. 2001 年 J. van Mill[205] 的力作 *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces* 表明函数空间的研究是一般拓扑学中很有活力的研究方向. 本书的出版将使近年来活跃的 "度量空间的连续映射" 及 "连续函数空间的拓扑性质" 这两个研究方向融为一体, 希望国内有更多的年青数学工作者投身于该方向的研究, 不断提升拓扑学的研究水平, 为继续扩大我国一般拓扑学的国际影响作出更大的贡献. 本书的部分书稿曾在福建师范大学数学系 2000 级研究生及宁德师范高等专科学校的青年教师讨论班中讲授过. 感谢美国电子杂志 *Topological Commentary* 主编 M. Henriksen 教授提供部分拓扑学家的史料, 感谢福建师范大学聘请作者为基础数学学科特聘教授并提供宽松的工作条件. 本书的出版应特别感谢戴牧民教授、吴利生教授的热情推荐.

谨以本书献给我的导师高国士教授 85 岁寿辰.

作　者

2003 年 5 月 23 日于福建师范大学

目　　录